

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu, Niš

Dejan M. Petković

Dejan D. Krstić

Vladimir B. Stanković

Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi
Sveska V

ELEKTROMAGNETNI TALASI I ZRAČENJE

Niš, 2008. godine

Autori

Profesor dr Dejan M. Petković,
Fakultet zaštite na radu, Niš
Asistent mr Dejan D. Krstić, die
Fakultet zaštite na radu, Niš
Vladimir B. Stanković, die
Fakultet zaštite na radu, Niš

Medicinski konsultant

Dr Ljiljana Šurdilović-Petković,
Specijalna psihijatrijska Bolnica, Gornja Toponica, Niš

Naslov

Elektromagnetna zračenja - izvodi sa predavanja i vežbi, Sveska V
ELEKTROMAGNETNI TALASI I ZRAČENJE

Prvo izdanje, Niš, 2008.

Izdavač

Fakultet zaštite na radu, Niš
18000 Niš, Čarnojevića 10a

Za izdavača

Dekan fakulteta, profesor dr Dragan Spasić

Recenzenti

Profesor dr Predrag Dimitrijević,
Prirodno-matematički fakultet, Niš
Profesor dr Dragan Veličković,
Fakultet zaštite na radu, Niš

Odlukom Naučno-nastavnog veća Fakulteta zaštite na radu u Nišu, kvalifikovano kao udžbenik. Udžbenik je napisan u okviru projekta Ministarstva za nauku i tehnološki razvoj TR-21035.

Tehnička obrada

Autori

Korice

Rodoljub Avramović
Fakultet zaštite na radu, Niš

Štampa

Rolerprint, Niš

Tiraž

200 primeraka

ISBN 978-86-80261-89-8

**Posvećeno uspomeni na
Akademika prof. dr Jovana Surutku**

Sadržaj

Predgovor

- 01 - *Maxwellove* jednačine
- 02 - O jednačini kontinuiteta
- 03 - O struji električnog pomeraja
- 04 - Talasna jednačina
- 05 - Talasna jednačina za potencijale
- 06 - Brzina prenošenja elektromagnetnog poremećaja
- 07 - Operatorski prikaz talasne jednačine
- 08 - Rešavanje talasne jednačine
- 09 - Analiza rešenja talasne jednačine
- 10 - Integralna rešenja talasne jednačine
- 11 - *Helmholtzove* jednačine
- 12 - Osobine elektromagnetnih talasa u dielektricima
- 13 - Polarizacija elektromagnetnih talasa
- 14 - Elektromagnetni talasi u poluprovodnoj sredini
- 15 - Fazna brzina
- 16 - Osobine EMT u poluprovodnoj sredini
- 17 - Odbijanje i prelamanje EMT
- 18 - Koeficijenti refleksije i transmisije EMT
- 19 - *Brewsterov* (ugao) zakon
- 20 - Totalna refleksija
- 21 - EMT u kontinualno nehomogenom dielektriku
- 22 - Jednačina ajkonala
- 23 - *Fermatov* princip
- 24 - *Descartes, Snell, Brewster, Fermat*
- 25 - Oscilovanje elektrona pod dejstvom EMT
- 27 - Prodiranje EMT u provodnike
- 28 - Površinski (Skin) efekat
- 29 - Granični uslovi na površini idealnog provodnika
- 30 - Stojeći EMT
- 31 - EMT u jonizovanoj sredini
- 32 - Osobine EMT u jonizovanoj sredini
- 33 - Grupna brzina
- 34 - Vođeni EMT
- 35 - EM zračenje

- 36 - Prenos EM energije
- 37 - *Hertzov* dipol i *Branlyjev* koherer
- 38 - *Hertzov* dipol
- 39 - *Hertzov* dipol kao harmonijski oscilator
- 40 - Zone prostiranja EMT
- 41 - EMT *Hertzovog* harmonijskog oscilatora
- 42 - *Coulomb* i *Hertz* - odakle potiče EM zračenje ?
- 43 - Snaga i otpornost zračenja *Hertzovog* oscilatora
- 44 - *Pocklingtonova* integro-diferencijalna jednačina
- 45 - *Hallenova* integralna jednačina
- 46 - Napajanje dipola delta generatorom
- 47 - Konstante u *Hallenovoj* integralnoj jednačini
- 48 - Beskonačno tanak dipol i sinusna raspodela struje
- 49 - Sinusni paradoks
- 50 - EM polje dipola u zoni zračenja
- 51 - Karakteristika zračenja dipola
- 52 - Snaga i otpornost zračenja dipola
- 53 - Step en korisnog dejstva i pojačanje antene
- 54 - Elektromagnetni spektar
- 55 - Čovek u EMP
- 56 - Čovek u NF EMP
- 57 - RF zračenje
- 58 - RF zračenje - SAR i biološki efekti
- 59 - RF zračenje - eksperimenti in vivo
- 60 - RF zračenje - merenje i normiranje
- 61 - IR zračenje
- 62 - IR zračenje - biološki efekti
- 63 - VIS ili optičko zračenje
- 64 - Obična i LASERska svetlost
- 65 - LASERsko zračenje - klase sigurnosti
- 66 - LASERsko zračenje - mere sigurnosti
- 67 - UV zračenje
- 68 - UV zračenje - zablude i istine
- 69 - UV indeks
- 70 - UV indeks i mere zaštite
- 71 - UV zračenje - proračun UV indeksa
- 72 - UV zračenje - biološki efekti
- 73 - X zračenje – uvod u jonizujuća zračenja

Literatura

Prilog 1 - Neke osnovne fizičke veličine i jedinice

Prilog 2 - Multipli jedinica

Prilog 3 - Neke fizičke konstante

Prilog 4 - Osnovne elektromagnetne veličine i jedinice

Prilog 5 - Osnovne jednačine makroskopskog EM polja

Prilog 6 - Podela EM spektra na opsege

Prilog 7 - *Lagrangeov* metod varijacije konstanti

Prilog 8 - Sinus i Kosinus integral

Predgovor

Tekst pod nazivom *Elektromagnetni talasi i zračenje* je namenjen studentima Fakulteta zaštite na radu u Nišu i trebalo bi da posluži za savladavanje gradiva iz predmeta koji se, kako po starom tako i po novom nastavnom planu, izučavaju na ovom fakultetu. Dobrim delom tekst može da posluži i studentima drugih fakulteta. Tekst je prilagođen savremenim metodama učenja. Izučavanje elektromagnetnih zračenja podrazumeva neka prethodna znanja iz fizike, više matematike i elektrotehnike. I pored toga što se radi o izvodima sa predavanja u većini slučajeva data su sva neophodna objašnjenja.

Osnovna ideja prvopotpisanog autora je da kroz seriju Sveski iz oblasti elektromagnetike pruži kompletnu literaturu koja je potrebna inženjeru koji se bavi ili će se baviti zaštitom od uticaja elektromagnetnih polja. Tako je u ovoj svesci osim teorijskih izlaganja prikazano mnoštvo rezultata iz prakse, metodi merenja, kao i osvrt na postojeće standarde. Prema osnovnoj ideji, neke teme kao što su vođeni elektromagnetni talasi, vidljivo zračenje i fotometrija, zakoni toplotnog zračenja i jonizujuće zračenje nisu detaljno razmatrani jer će biti posebno obrađeni.

Tekst se može naći i na adresi **www.znrfak.ni.ac.rs**.

U Nišu, na Vidovdan 2008. godine,
Autori

1 - *Maxwellove jednačine*

Potpun sistem *Maxwellovih* (*James Clarck Maxwell*, 1831-1879) jednačina sa početnim i graničnim uslovima potpuno određuje elektromagnetno polje.



$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\text{div } \vec{B} = 0$
---	--	------------------------------	---------------------------



Prema *Helmholtzovoj* (*Hermann von Helmholtz*, 1821-1894) teoremi vektorsko polje je jednoznačno određeno ako jačina opada najmanje sa kvadratom rastojanja i ako su u svakoj tački polja koja pripada oblasti definisanosti poznati prostorni izvodi.

Elektromagnetno polje je jednoznačno određeno.



Za *Maxwellove jednačine Boltzmann* (*Ludwig Eduard Boltzmann*, 1844-1906) je zapisao:

"Da li je Bog pisao ove znakove"

Označavanje redosleda *Maxwellovih* jednačina nije usvojeno pa se u literaturi sreću različiti redosledi. Najpravičnije bi bilo nazvati ih jednačinama cirkulacije i divergencije. Međutim, treba primetiti da druga i četvrta jednačina ne zavise od osobina sredine, dok prva i treća čine srodan par za elektromagnetno polje u materijalnoj sredini.

- I - Uopštenje i korekcija *Ampereovog* zakona
- II - Uopštenje *Faradayevog* zakona elektromagnetne indukcije
- III - Uopštenje *Gaussovog* zakona - *Maxwellov* postulat
- IV - Zakon o konzervaciji magnetnog fluksa

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

Maxwellovim jednačinama dodaju se i jednačine stanja sredine. U homogenim, linearnim i izotropnim sredinama vektori indukcija i polarizacija su kolinearni pa je :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Radi daljeg izlaganja, a i zbog toga što je veličine E i B moguće dobiti merenjem u vazduhu i vakuumu, sistem *Maxwellovih* jednačina je potrebno napisati u obliku :

$\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$	$\text{div } \vec{B} = 0$
--	--	---	---------------------------

2 - O jednačini kontinuiteta

Maxwellove jednačine su u potpunom skladu sa zakonom o održanju naelektrisanja. Ako se pođe od prve jednačine, $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, tako što se obrazuje divergencija obe strane ove jednačine,

$\text{div}(\text{rot } \vec{H}) = \text{div } \vec{J} + \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, sledi $\text{div } \vec{J} + \text{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, jer je divergencija rotora bilo kog vektora jednaka nuli. Pošto operacije diferenciranja po vremenu i koordinatama mogu da zamene mesta,

$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div } \vec{D}) = 0$, na osnovu treće jednačine se dobija dobro poznata jednačina kontinuiteta ili diferencijalni oblik zakona o održanju količine naelektrisanja. U specijalnom slučaju stacionarnog strujnog polja izvod po vremenu je jednak nuli pa se dobija prvi *Kirchoffov* zakon u diferencijalnom (lokalnom) obliku.

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

3 - O struji električnog pomeraja

Ampereov zakon, $\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$, koji je tačan za stacionarna strujna polja nije u skladu sa jednačinom kontinuiteta. Da bi otklonio očiglednu protivrečnost *Maxwell* je na osnovu svog postulata

$\text{div } \vec{D} = \rho$ desnoj strani *Ampereovog* zakona dodao član $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ i tako zbir dva vektora učinio bezizvor-nim i u slučaju promenljivih polja. Tako je učinjena jedna od najgenijalnijih hipoteza koja je skromno nazvana korekcija. Kako

$$\text{div} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

je $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ to je $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$. Oba sabirka dimenziono su

gustina struje. Prvi sabirak, gustina struje električnog pomeraja, postoji i u odsustvu materijalne sredine. Ovu struju nije moguće objasniti kretanjem nosilaca naelektrisanja. Ovo postaje očigledno u slučaju neprovodne sredine tj. kad je $\sigma = 0$, $J = 0$, tada je i $\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ova struja stvara magnetno polje kao i kondukcionalna struja. Problem prave prirode ove struje je istovetan sa problemom razumevanja promenljivog elektromagnetnog polja. Drugi sabirak je gustina struje polarizacije koja nastaje zbog malih pomeranja vezanih naelektrisanja u materiji do kojih dolazi samo usled dejstva promenljivih elektromagnetnih polja. Ova struja se ne razlikuje od kondukcione struje i sasvim je bilo logično dodati ovaj sabirak u već postojeći *Ampereov* zakon.

4 - Talasna jednačina

Neka se u nekoj tački prostora desio elektromagnetni poremećaj-makroskopsko kretanje nosilaca naelektrisanja. Neka je ostatak prostora homogena, linearna i izotropna sredina. Elektromagnetni poremećaj će se kroz sredinu prenositi kao talas koji se kreće nekom brzinom u odnosu na nepokretnog posmatrača. Elektromagnetno polje koje je jednom stvoreno se prostire nezavisno od izvora, kao što talasi koji potiču od kamena bačenog u vodu postoje i pored toga što je kamen odavno na dnu.

Ako se pođe od druge *Maxwellove* jednačine i potraži *rotor* obe strane, dobija se :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \quad \text{tj.} \quad \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B}.$$

Na osnovu treće i druge *Maxwellove* jednačine sledi

$$\text{grad}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \vec{J} + \epsilon \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

i konačno nakon pregrupisavanja članova sledi:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \text{grad}\left(\frac{\rho}{\epsilon}\right)$$

što je poznato kao talasna jednačina. Istim postupkom, ako se krene od prve *Maxwellove* jednačine dobija se talasna jednačina za vektor $\vec{B}$.

$$\Delta \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu \text{rot } \vec{J}$$

Desne strane talasnih jednačina ukazuju da su izvori promenljivog elektromagnetnog polja ne samo naelektrisanja i struje, već i njihove promene u vremenu i prostoru.

Ako je u okolnom prostoru srednja zapreminska gustina naelektrisanja jednaka nuli, dakle i gradijent na desnoj strani talasne jednačine za električno polje je jednak nuli, što ne znači da je i srednja gustina struje jednaka nuli (u provodnicima je to slučaj jer se elektroni kreću kroz jonsku rešetku) talasne jednačine se primenom konstitutivne veze za gustinu struje prikazuju u obliku:

$$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \Delta \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

5 - Talasna jednačina za potencijale

Kako je $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ iz druge *Maxwellove* jednačine sledi

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{A} \Rightarrow \text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \varphi \text{ ili}$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Tako su obe komponente elektromagnetnog polja određene pomoću vektorskog magnet potencijala i električnog skalar potencijala. Iz prve *Maxwellove* jednačine sada se dobija :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu \vec{J} - \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right).$$

Kad se zameni izraz za rotor rotora vektorske funkcije (videti talasnu jednačinu za električno polje) dobija se

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right).$$

Kao što je poznato potencijali nisu jednoznačno određene funkcije i razlikuju se uvek za aditivnu konstantu. Komponente polja su kao vremenski i prostorni izvodi jednoznačno određene. Divergencija magnetskog vektor potencijala ničim nije određena. Kod statičkih polja usvojeno je da je jednaka nuli, što je poznato kao *Coulombova* kalibracija potencijala. Moguće je izabrati i da je :

$$\text{div} \vec{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Ovaj izbor potiče od *Lorenza* (*Ludwig Valentin Lorenz*, 1829-1891) i naziva se jednačina kontinuiteta potencijala, *Lorenzov* uslov ili kalibracija (baždarenje) potencijala. Tako se konačno dobija talasna jednačina za magnetski vektor potencijal.

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$$

Na sličan način dolazi se i do talasne jednačine za električni skalar potencijal. Kad se krene od treće



Maxwellove jednačine dobija se :

$$\text{div} \left(\text{grad} \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \text{ ili } \text{div}(\text{grad} \varphi) + \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \text{ Kad se upotrebi}$$

Lorenzov uslov sledi talasna jednačina:

Često se pogrešno misli da jednačina kontinuiteta potencijala potiče od poznatog nobelovca *Lorentza* (*Hedrik Antoan Lorentz*, 1853-1928) koji je takođe dao izuzetne doprinose u elektrodinamici.

$$\Delta \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

6 - Brzina prenošenja elektromagnetnog poremećaja

Sve komponente električnog i magnetnog polja i potencijala zadovoljavaju talasnu jednačinu istog oblika:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -f,$$

gde veličina ϕ označava bilo koju od pomenutih komponenti i f bilo koja od desnih strana talasnih jednačina.

Veličina $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ ima prirodu brzine i to je brzina kojom se prenosi elektromagnetni poremećaj. U vakuumu je

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{36\pi} 10^{-9} 4\pi 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = c,$$

što je brzina prostiranja svetlosti. Ovaj rezultat je doveo *Maxwella* do jedne od najgenijalnijih ideja o elektromagnetnoj prirodi svetlosti. Ovako dobijena teorijska vrednost za brzinu svetlosti se vrlo malo razlikuje od one koja je dobijena kao rezultat vrlo preciznih eksperimenata,

$$c = (2.997925 \pm 0.000003) 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

7 - Operatorski prikaz talasne jednačine

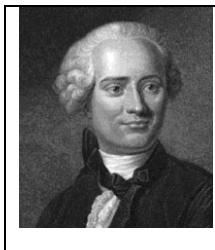
Treba primetiti da kada ne postoje promene u vremenu talasna jednačina postaje *Poissonova*. Dalje, kada je i desna strane jednačine jednaka nuli ova jednačina postaje *Laplaceova*. Prostorni izvod drugog reda u talasnoj jednačini je je Laplasijen sa oznakom $\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi)$.

D'Alambert (*Jean-le-Rond d'Alambert*, 1717-1783) je proučavajući talasna kretanja uveo operator koji laplasijenu dodaje i drugi izvod po vremenu

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$$

pa se u literaturi sreće i naziv *d'Alambertova* jednačina.

Tačnije, ovaj vrstan naučnik je talasnu jednačinu rešio, i tim rešenjem je pokazao da funkcije koju ovu jednačinu zadovoljavaju opisuju talasno kretanje.



8 - Rešavanje talasne jednačine

Komponente elektromagnetnog polja koje zadovoljavaju talasne jednačine ne moraju obavezno da predstavljaju elektromagnetni talas. Talasne jednačine su formalno rešenje *Maxwellovih* jednačina, ali ove ne slede iz talasnih jednačina. Neophodno je da rešenje talasne jednačine zadovoljava i *Maxwellove* jednačine.

Kada u prostoru kroz koji se prostire elektromagnetni poremećaj nema drugih izvora elektromagnetnog poremećaja, tj. kad je srednja gustina naelektrisanja jednaka nuli, nema pobudnih struja i kada je provodnost sredine jednaka nuli, desne strane talasnih jednačina su jednake nuli, pa bilo koja komponenta polja i potencijali zadovoljavaju talasnu jednačinu oblika :

$\Delta\phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$. Stanje elektromagnetnog polja je sferno simetrično u odnosu na izvor poremećaja koji se nalazi u jednoj tački koju je pogodno izabrati za centar sfernog koordinatnog sistema (r, θ, φ) . U sfernom koordinatnom sistemu laplasijen funkcije ϕ koja zavisi samo od radijalne koordinate je

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2}.$$

Funkcija $\phi = \phi(r, t)$ koja zadovoljava talasnu jednačinu zavisi samo od rastojanja i vremena pa talasna jednačina dobija oblik :

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2} = 0. \text{ Ako se uvedu smene } \xi = t - r/v, \eta = t + r/v \text{ ova}$$

jednačina se svodi na oblik $\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, čije je rešenje očigledno zbir dve

funkcije od kojih svaka zavisi samo od jedne od promenljivih ξ ili η ,

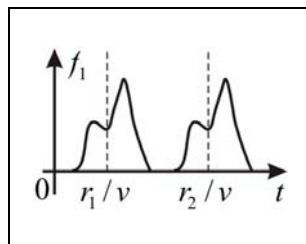
$$r\phi = f_1(\xi) + f_2(\eta) \text{ ili } \boxed{\phi(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{v}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{v}\right)}$$

gde su f_1 i f_2 proizvoljne dva puta diferencijabilne funkcije u vremenu i prostoru i nazvane su talasnim funkcijama. Funkcija f_1 u trenutku t na mestu izvora elektromagnetnog poremećaja, $r = 0$, ima istu vrednost i na nekom drugom rastojanju r , ali u kasnijem trenutku $t + r/v$. Slično, funkcija f_2 na nekom rastojanju r imala je istu vrednost na rastojanju $r = 0$, ali u ranijem trenutku $t - r/v$.

9 - Analiza rešenja talasne jednačine

Sferni talasi - Partikularna rešenja talasne jednačine su talasne funkcije koje opisuju dva sferna talasa. Zbog faktora $1/r$ oba imaju opadajuće amplitude. Funkcija $f_1(t-r/v)$ na nekom rastojanju od mesta gde je nastao elektromagnetni poremećaj dostiže istu vrednost kao i na samom mestu poremećaja, ali sa zakašnjenjem.

Otuda potiče naziv potencijali i polja u zakašnjenju ili retardirana polja. Za posmatrača koji se kreće po zakonu $t-r/v = \text{const.}$ ova funkcija zadržava stalno istu vrednost. Kada se ovaj zakon diferencira po vremenu, $dr/dt = v$, dobija se brzina kojom se talas i posmatrač kreću.



Ova funkcija opisuje progresivni talas koji se prostire u smeru r - direktni talas. Na isti način se pokazuje da druga funkcija $f_2(t+r/v)$ opisuje progresivni talas koji se prostire u suprotnom smeru, tj. prema izvoru elektromagnetnog poremećaja, što bi odgovaralo talasima koji su se odbili od neke sferne površine čiji je centar u tački elektromagnetnog poremećaja - reflektovani talas. Da li će postojati samo jedan od talasa ili oba zavisi samo od toga da li u prostoru postoje diskontinuiteti koji dovode do odbijanja direktnog talasa.

Ravanski talasi - Na velikim rastojanjima od mesta gde je nastao elektromagnetni poremećaj faktor $1/r$ je moguće smatrati konstantnim. Kao kad kamen bačen u sredinu jezera na obali proizvodi ravanski talas. Tada je rešenje talasne jednačine oblika:

$$\phi(r, t) = g_1(t - r/v) + g_2(t + r/v)$$

i opisuje dva progresivna ravanska talasa koji se prostiru u suprotnim smerovima. I pored toga što ne postoje prirodni ili veštački izvori ravnaskih talasa njihovo proučavanje je od velikog teorijskog i praktičnog značaja. Brzina prostiranja talasa i odnos komponenti elektromagnetnog polja je isti u oba slučaja, pa je ova aproksimacija sfernih talasa pomoću ravnaskih, sasvim opravdana, a matematički model znatno jednostavniji. Do prethodnog rešenja je moguće doći i direktnim rešavanjem talasne jednačine. Kad su komponente polja i potencijali funkcije samo jedne koordinate i vremena talasna jednačina ima oblik :

Istim smenama, $\xi = t - r/v$, $\eta = t + r/v$, kao i u slučaju sfernih talasa dolazi se do prethodnog rešenja.

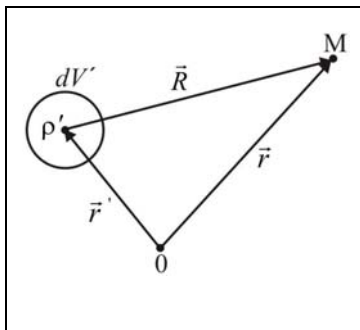
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

10 - Integralna rešenja talasne jednačine

Razmotrimo integralna rešenja talasne jednačine za potencijale. Kada nema promena u vremenu talasne jednačine za potencijale se svode na *Poissonove*, tj.

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \Delta\vec{A} = -\mu\vec{J},$$

čija su rešenja u integralnom obliku poznata:



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{R} dV', \quad \vec{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(r')}{R} dV', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|,$$

gde je R rastojanje između tačke izvora i tačke u kojoj se potencijali određuju. Uvođenjem proizvoljno postavljenog koordinatnog početka daje se opštost rešenju koje sledi.

Rešenje talasne jednačine predstavljeno zbirom dve proizvoljne neprekidne i dva puta diferencijabilne funkcije po vremenu i koordinatama,

$$\phi(r, t) = \frac{1}{R} f_1\left(t - \frac{R}{v}\right) + \frac{1}{R} f_2\left(t + \frac{R}{v}\right),$$

na veoma malim rastojanjima moraju da dobiju kvazistacionarni oblik, pa se može napisati:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(r', t \mp R/v)}{R} dV', \quad \vec{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(r', t \mp R/v)}{R} dV'$$

Dokaz da su prikazani izrazi rešenja talasne jednačine izvodi se neposrednom zamenom ovih rešenja u talasnu jednačinu.

Kada su naelektrisanja i struje raspoređeni duž tankih žičanih provodnika, kao što su žičane antene, zapreminski integrali prelaze u linijske, tj.

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_L \frac{q'(r', t \mp R/v)}{R} dl', \quad \vec{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{I(r', t \mp R/v)}{R} d\vec{l}'.$$

Određivanje elektromagnetnog polja sastoji se u poznavanju raspodele naelektrisanja i struja na mestu izvora odakle se računaju potencijali i zatim pomoću *Maxwellovih* jednačina komponente elektromagnetnog polja.

11 - Helmholtzove jednačine

Od najvećeg značaja su talasi čije talasne funkcije su harmonijske u vremenu, jer se svi ostali talasni oblici razvojem u red mogu svesti na osnovni talasni oblik, na primer sinusnu funkciju. Dakle, neka je $\phi(r, t) = \phi = \phi_0(r) \sin(\omega t + \varphi)$, gde funkcija ϕ predstavlja, kao i ranije, bilo koju komponentu polja ili potencijala, $\omega = 2\pi f$ je kružna frekvencija i φ je faza (ne potencijal). Ovakvi jednofrekventni talasi nazvani su monohromatski ili jednobojni (Grk. *monos*- jedno, *chroma* - boja) odmah nakon pojavljivanja *Maxwellove* teorije o elektromagnetnoj prirodi svetlosti. Ako je ϕ rešenje talasne jednačine, onda su i dva karakteristična slučaja $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$, i linearna kombinacija tih slučajeva takođe rešenje. Tu linearnu kombinaciju je pogodno predstaviti u kompleksnom obliku:

$$\phi = \phi_0(\sin \omega t + j \cos \omega t) = \phi_0 e^{j\omega t}.$$

Izvodi po vremenu tako postaju:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = j\omega \phi_0 e^{j\omega t} = j\omega \phi, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi_0 e^{j\omega t} = -\omega^2 \phi.$$

Kada se ovi izrazi uvrste u talasne jednačine, slede *Helmholtzove* jednačine u kojima je k talasni broj, tj. broj talasa na dužini 2π , ili fazna konstanta.

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} &= j\omega \mu \sigma \vec{E} \\ \Delta \vec{B} + k^2 \vec{B} &= j\omega \mu \sigma \vec{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi + k^2 \varphi &= -\rho / \epsilon \\ \Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} &= -\mu \vec{J} \end{aligned}$$

$$k = \omega / v = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = 2\pi f / v = 2\pi / \lambda$$

Kako brzina prenošenja elektromagnetnog poremećaja zavisi od elektro-

magnetnih osobina sredine, to je moguće izvesti približnu ali vrlo praktičnu formulu za izračunavanje talasne dužine u slobodnom prostoru (vrlo približno za vazduh),

$$\begin{aligned} \lambda[\text{km}] &= \frac{300000}{f[\text{Hz}]} \\ \lambda[\text{m}] &= \frac{300}{f[\text{MHz}]} \end{aligned}$$

Namena	f	λ
Industrija	50 Hz	6000 km
Radio	100 MHz	3 m
Mob.tel.	1 GHz	30 cm

Na velikim udaljenostima amplituda talasa koja opada po zakonu $1/r$ postaje zanemarljiva. Zračenje koje potiče od industrijske frekvencije praktično ne postoji, ali zato u blizini postoje indukovana elektromagnetna polja. Međutim, živimo u sredini u kojoj postoji mnogo izvora elektromagnetnih polja na različitim rastojanjima i različitim talasnim dužinama. Živimo u elektromagnetnom zagađenju ili elektromagnetnom smogu.

12 - Osobine EMT u dielektricima

U slučaju ravnog talasa u dielektriku u kome nema dodatnih izvora elektromagnetnih poremećaja *Helmholtzova* jednačina je homogena linearna jednačina drugog reda čije je rešenje oblika $\phi = C_1 e^{jkx} + C_2 e^{-jkx}$ gde su C_1 i C_2 konstante integracije. Kada se uzme u obzir i pretpostavljena promena u vremenu, i ako se zadržimo samo na direktnom talasu, komponente elektromagnetnog polja i potencijali su oblika: $\phi = C e^{j(\omega t - kr)}$.

Na osnovu jednačina divergencije je onda:

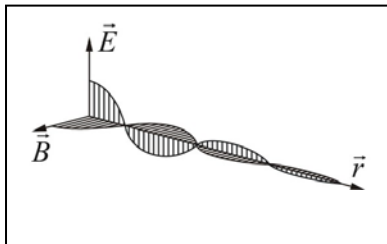
To znači da su vektori električnog i magnetnog polja normalni na pravac prostiranja, r .

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= -jk\vec{E}\hat{r} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= -jk\vec{B}\hat{r} = 0.\end{aligned}$$

Iz jednačine cirkulacije, na primer, za vektor električnog polja sledi $\operatorname{rot} \vec{E} = -jk(\hat{r} \times \vec{E}) = -j\omega\vec{B}$, odakle je:

$$\vec{B} = \frac{1}{v}(\hat{r} \times \vec{E})$$

tj. $E = vB$. To znači da su vektori električnog i magnetnog polja međusobno upravni i sa pravcem prostiranja obrazuju desni trijedar. Ovakvi talasi su transverzalni. Brzina prostiranja je realna veličina i električno i magnetno polje su u istoj fazi (sinhroni).



Gustine energije električnog i magnetnog polja su:

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \text{ i } w_m = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2\mu} \epsilon \mu E^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = w_e, \text{ što znači da su gusti-}$$

ne energija obe komponente ravnog elektromagnetnog talasa jednake i da je ukupna gustina energije dvostruko veća. Pošto su komponente polja međusobno normalne, vrednost *Pointyngovog* vektora je

$$\Gamma = |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{1}{\mu} EB = \frac{1}{\mu} \sqrt{\epsilon\mu} E^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon\mu}} E^2 = \epsilon v E^2 = w v,$$

$$\Gamma = w v$$

tj. brzina prenošenja elektromagnetne energije jednaka je brzini prostiranja talasa.

Iz činjenice da su komponente elektromagnetnog ravanskog talasa međusobno normalne, tj. iz odnosa između jačina vektora $\vec{E}$ i $\vec{B}$ sledi i odnos jačina komponenti polja. Ova veličina ima prirodu otpornosti i naziva se karakteristična ili talasna impedansa. U slobodnom prostoru talasna impedansa ima vrednost: $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi \Omega = 377\Omega$.

$$Z_c = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

13 - Polarizacija EMT

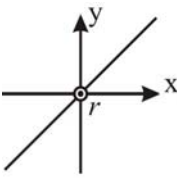
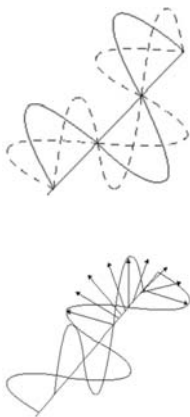
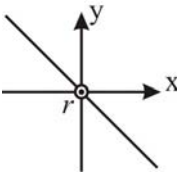
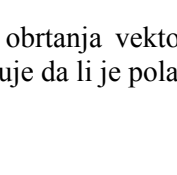
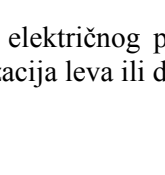
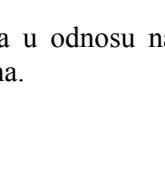
Ravan koju obrazuju pravac prostiranja elektromagnetnog talasa i pravac vektora električnog polja je ravan polarizacije. Talas koji ima samo jednu komponentu električnog polja, E_x ili E_y , je linijski polarizovan. Međutim, u opštem slučaju talas ima obe komponente koje nisu u fazi,

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t) \quad \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi ,$$

gde je φ relativni fazni pomeraj. Kad se iz poslednja dva izraza eliminiše vreme dobija se jednačina krive po kojoj se kreće vrh vektora električnog polja.

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{E_{0x}} \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \varphi + \left(\frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = \sin^2 \varphi .$$

U specijalnom slučaju kad je relativni fazni pomeraj $\varphi = \pi/2$ gornja jednačina se svodi na jednačinu elipse, pa je talas eliptično polarizovan. Ako su uz to i amplitude komponenti jednake jednačina elipse se redukuje na jednačinu kruga čiji je poluprečnik jednak amplitudi, pa je talas kružno polarizovan. U drugom specijalnom slučaju kad je fazni pomeraj $\varphi = 0$ jednačina se svodi na jednačinu prave, pa je talas linijski polarizovan.

Desna polarizacija				
	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/4$	$\varphi = \pi/2$	
				
	$\varphi = \pi$	$\varphi = -3\pi/4$	$\varphi = -\pi/2$	
				
	$\varphi = 0$	$\varphi = \pi/4$	$\varphi = \pi/2$	

Smer obrtanja vektora električnog polja u odnosu na pravac prostiranja određuje da li je polarizacija leva ili desna.

14 - EMT u poluprovodnoj sredini

U poluprovodnoj sredini, $\sigma \neq 0$, kao i u provodnicima, ima onoliko slobodnih elektrona koliko i jona, ali kreću se samo elektroni. To znači da je $\rho = 0$ i da pored struje dielektričnog pomeraja postoji i kondukciona struja koja je, prema *Ohmovom* zakonu, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$. Za prostoperiodična polja je $\partial \phi / \partial t = j\omega \phi$ i $\partial^2 \phi / \partial t^2 = -\omega^2 \phi$, gde je ϕ oznaka za bilo koju komponentu polja ili potencijala, pa je prvu *Maxwellovu* jednačinu $\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ moguće napisati u jednom od oblika

$$\text{rot } \vec{H} = (\sigma + j\omega \epsilon) \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}$$

ili

$$\text{rot } \vec{H} = j\omega \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E} = j\omega \underline{\epsilon} \vec{E}$$

tj. kod prostoperiodičnih promena poluprovodne sredine je moguće razmatrati kao savršene (provodnike ili izolatore) ako se specifična provodnost i dielektrična konstanta predstave kao kompleksne veličine.

Kod dobrih dielektrika provodnost je vrlo mala, dok je kod dobrih provodnika vrlo velika, pa je u statičkim i kvazistacionarnim poljima jednostavna podela na izolatore (loše provodnike) i provodnike (loše izolatore) samo približna. Međutim, kada se radi o prostiranju prostoperiodičnih talasa kroz neku sredinu gustina struje pomeraja je srazmerna frekvenciji kao $\omega \epsilon E$, a gustina kondukcijske struje sa σE , pa je za podelu sredina važan odnos gustina ovih struja, $\sigma / \omega \epsilon$, koji se inače dobija kada se izjednače realni i imaginarni deo kompleksne dielektrične konstante. Odnos $\omega_c = \sigma / \epsilon$ ima prirodu kružne frekvencije koja je nazvana kritičnom ili graničnom.

$\omega_c / \omega \rightarrow \infty$	savršen provodnik
$\omega_c / \omega \gg 1$	dobar provodnik
$\omega_c / \omega \approx 1$	poluprovodnik
$\omega_c / \omega \ll 1$	dobar izolator
$\omega_c / \omega \rightarrow 0$	savršen izolator

Dobri provodnici imaju najviše kritične frekvencije, a dobri izolatori najniže. Organske materije su u električnom smislu skoro savršeni izolatori, ali to ne važi i za magnetno polje.

materijal	σ [S/m]	ϵ_r	$f_c = \omega_c / 2\pi = \sigma / 2\pi \epsilon_r \epsilon_0$ [Hz]
Bakar	$5.8 \cdot 10^7$	1.0	$104 \cdot 10^{16}$ Hz = 1040 PHz
Zemljište	$1.0 \cdot 10^{-3}$	6.0	$3 \cdot 10^6$ Hz = 3 MHz
Guma	$1.0 \cdot 10^{-7}$	2.5	720 Hz
Jetra	0.04	$0.18 \cdot 10^7$	$0.5 \cdot 10^{-12}$ Hz = 0.5 pHz

15 - Rešenje *Helmholtzove* jednačine

Za poluprovodne sredine, $\sigma \neq 0$, talasna jednačina (za neku od komponenti polja) $\Delta\phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \mu\sigma \frac{\partial\phi}{\partial t}$, u slučaju prostoperiodičnih promena svodi se na *Helmholtzovu* jednačinu,

$$\Delta\phi + \omega^2\mu\epsilon\phi = 0,$$

koja je formalno istog oblika kao za idealan dielektrik, sa jedinom razlikom što se koristi kompleksna dielektrična konstanta. Pošto se već radi u kompleksnom domenu ostale veličine nisu posebno označavane kao kompleksne. Rešenja su takođe formalno istog oblika. Za talas koji se prostire u pravcu r rešenje je

$$\phi = \phi_1 e^{-\gamma r} + \phi_2 e^{+\gamma r}, \text{ gde je } \gamma^2 = -\omega^2\epsilon\mu.$$

Ova kompleksna veličina, $\gamma = \alpha + jk$, nazvana je konstanta prostiranja. Realni deo je konstanta slabljenja i imaginarni deo je, kao i kod savršenog dielektrika, fazna konstanta ili talasna konstanta. Dva sabirka u rešenju *Helmholtzove* jednačine predstavljaju, kao i ranije, dva progresivna talasa koji se prostiru u istom pravcu ali u suprotnim smerovima. Za talas koji se prostire od tačke elektromagnetnog poremećaja je:

$$\phi = \phi_1 e^{-\alpha r} \cos \omega(t - r/v).$$

Dakle, elektromagnetni talasi u poluprovodnim sredinama su amortizovani (prigušeni) Prirodni logaritam odnosa amplituda u dve ekvifazne ravni na međusobnom rastojanju d je slabljenje koje se izražava u *neperima*:

$$\ln \frac{\phi_1 e^{-\alpha r}}{\phi_1 e^{-\alpha(r+\delta)}} = \alpha\delta. \text{ Međutim, danas je u upotrebi } \textit{decibel}, \text{ pa se slabljenje}$$

definiše kao: $20 \log(\phi_1 e^{-\alpha r} / \phi_1 e^{-\alpha(r+\delta)})$.

Kako je $\gamma^2 = -\omega^2\mu\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right) = (\alpha + jk)^2$, razdvajanjem realnih i imaginarnih delova i eliminacijom se dobijaju sledeći izrazi

$$\alpha = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} - 1 \right)} \quad \text{ i } \quad k = \omega \cdot \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} + 1 \right)}.$$

U specijalnom slučaju idealnog dielektrika, $\sigma = 0$, konstanta slabljenja je jednaka nuli, a fazna konstanta dobija poznati oblik.

Vektori $\vec{E}$ i $\vec{B}$ sa pravcem prostiranja $\vec{r}$ obrazuju desni trijedar kao i kod neamortizovanih talasa.

16 - Osobine EMT u poluprovodnoj sredini

Odnos $v = \omega/k$, kao i kod idealnog dielektrika predstavlja brzinu prostiranja faze tj. faznu brzinu. Na osnovu izraza za k je jasno da je fazna brzina u poluprovodnoj sredini manja od one u idealnom dielektriku i da zavisi od frekvencije. Isto važi i za talasnu dužinu, jer je $\lambda = v/f$. U sredinama u kojima fazna brzina zavisi od frekvencije, i koje se nazivaju disperzivne sredine (Nlat: *dispersivus* - rasipan), elektromagnetna energija se prenosi brzinom prostiranja grupe tj. grupnom brzinom.

Karakteristična impedansa poluprovodne sredine definiše se isto kao i kod idealnog dielektrika, ali je zbog kompleksne prirode dielektrične konstante i sama kompleksna.

$$Z_c = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\omega\mu}{\alpha^2 + k^2}(k + j\alpha), \quad |Z_c| = \frac{\omega\mu}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}, \quad \text{Arg } Z_c = \arctg \frac{\alpha}{\beta}.$$

To znači da električna i magnetna komponenta progresivnog talasa u poluprovodnoj sredini nisu u fazi. Zbog toga se i uvodi pojam grupe brzine.

- Kod dobrih dielektrika, dakle dobrih izolatora, čak i pri niskim frekvencijama, ispunjen je uslov $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$, pa se svi izvedeni izrazi mogu znatno pojednostaviti. Kako je, vrlo približno

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \approx 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\epsilon^2}, \text{ to slede izrazi}$$

$$\begin{aligned} k &= \omega\sqrt{\epsilon\mu} \left(1 + \frac{\alpha^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right) & \alpha &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right) & Z_c &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon} \right) \end{aligned}$$

- Kod dobrih provodnika, dakle loših izolatora, je i pri visokim frekvencijama ispunjen uslov $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, tako da je

$$\alpha = k = \sqrt{\omega\mu\sigma}/2.$$

Ovo pojednostavljenje je isto što i zanemarivanje struje dielektričnog pomeraja u odnosu na kondukcionu struju.

$$v = \omega/k = \sqrt{2\omega/\mu\sigma}, \quad |Z_c| = \sqrt{\omega\mu/\sigma}, \quad \text{Arg } Z_c = \arctg(\alpha/k) = \pi/4$$

Električno polje prednjači u odnosu na magnetno, što znači da je karakteristična impedansa induktivna.

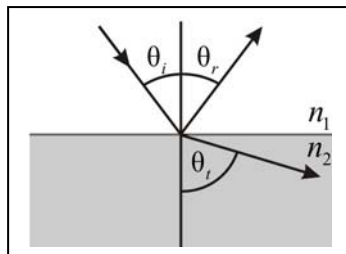
17 - Odbijanje i prelamanje EMT

Na razdvoju površ između dve poluprovodne sredine u kojima su konstante prostiranja γ_1 i γ_2 nailazi elektromagnetni talas pod sfernim uglovima θ_i , φ_i . Nailaskom na površinu diskontinuiteta upadni talas će izazvati odbijeni talas i prelomljeni talas. Ako je normala razdvojne površi orijentisana od sredine dva ka sredini jedan, onda upadni talas sa razdvojnou površi zaklapa uglove $\pi - \theta_i$ i φ_i . Odbijeni i prelomljeni talas zaklapaju uglove θ_r i φ_r , odnosno $\pi - \theta_i$ i φ_i .

Bilo koja komponenta polja bilo kog od ova tri talasa je oblika

$$\phi = \phi_0 e^{-j\gamma(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)},$$

gde je potrebno zameniti odgovarajuće uglove i konstante prostiranja.



Da bi granični uslovi na razdvojnoj površi $z = 0$ bili zadovoljeni potrebno je da eksponenti sve tri talasne funkcije budu jednaki. Da bi ova jednakost važila za svaku tačku površi potrebno je da koeficijenti uz x i y budu jednaki. To dovodi do sistema jednačina

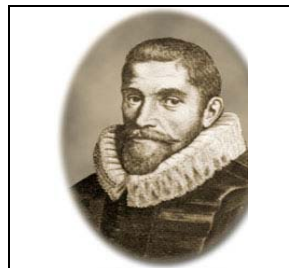
$$\gamma_1 \sin \theta_i \cos \varphi_i = \gamma_1 \sin \theta_r \cos \varphi_r$$

$$\gamma_1 \sin \theta_i \sin \varphi_i = \gamma_1 \sin \theta_r \sin \varphi_r$$

$$\gamma_1 \sin \theta_i \cos \varphi_i = \gamma_2 \sin \theta_t \cos \varphi_t$$

$$\gamma_1 \sin \theta_i \sin \varphi_i = \gamma_2 \sin \theta_t \sin \varphi_t$$

iz kojih slede *Snellovi* (*Willebrord Snell*, 1580-1626) zakoni odbijanja i prelamanja.



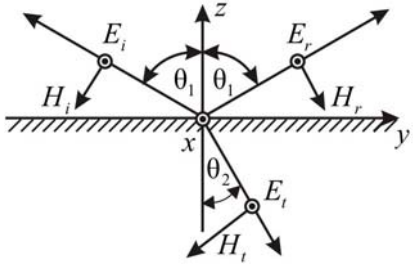
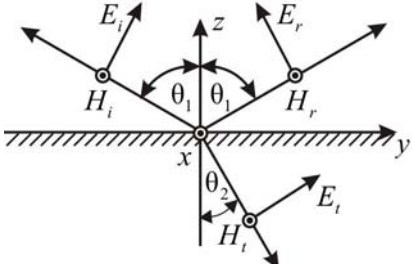
Deobom druge jednačine sa prvom sledi	$\varphi_r = \varphi_i$
i zamenom rezultata u prvu ili drugu jednačinu	$\theta_r = \theta_i$
Deobom četvrte jednačine sa trećom sledi	$\varphi_t = \varphi_i$
i zamenom rezultata u treću ili četvrtu jednačinu	$\gamma_1 \sin \theta_i = \gamma_2 \sin \theta_t$

Kada su sredine savršeni dielektrici, $\gamma = jk = j\omega v = j\omega \sqrt{\epsilon \mu}$, moguće je uvesti indeks prelamanja koji je jednak količniku brzine prostiranja faze u slobodnom prostoru i posmatranom dielektriku, $n = c/v$. Tada drugi *Snellov* zakon dobija oblik $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ koji je poznat iz optike.

18 - Koeficijenti refleksije i transmisije EMT

Snellovi zakoni daju vezu između uglova ali ne i između amplituda. Pošto ova veza zavisi od polarizacije elektromagnetog talasa posmatračemo dva karakteristična slučaja linijski polarizovanog talasa, jer se proizvoljno polarizovani talas uvek može predstaviti kao dva linijski polarizovana talasa. U svakom slučaju, granični uslovi na površini diskontinuiteta moraju biti zadovoljeni, a to znači da tangencijalne komponente ukupnog električnog i magnetnog polja sa obe strane površine moraju biti jednake. Takođe, uvek važe veze između komponenti elektromagnetnog polja:

$$H_{0i} = E_{0i} / Z_1, \quad H_{0r} = E_{0r} / Z_1 \quad \text{i} \quad H_{0t} = E_{0t} / Z_2.$$

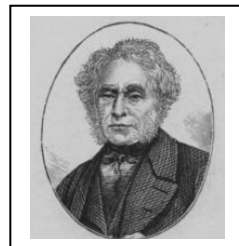
Električno polje normalno na ravan incidencije	Električno polje paralelno ravni incidencije
	
$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$ $(H_{0i} - H_{0r}) \cos \theta_i = H_{0t} \cos \theta_t$ ili $\frac{E_{0i} - E_{0r}}{Z_1} \cos \theta_i = \frac{E_{0t}}{Z_2} \cos \theta_t$	$(E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = E_{0t} \cos \theta_t$ $H_{0i} + H_{0r} = H_{0t}$ ili $\frac{E_{0i} + E_{0r}}{Z_1} = \frac{E_{0t}}{Z_2}$
Eliminacijom po jedne promenjive iz sistema koji čine prva i treća jednačina slede odnosi - koeficijenti	
$R_n = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}$ $T_n = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t}$	$R_p = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$ $T_p = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}$

Koeficijenti su poznati kao *Fresnelovi* (*Augustin Jean Fresnel*, 1788-1827) koeficijenti refleksije (odbijanja) i transmisije (prelamanja).

19 - Brewsterov (ugao) zakon

Indeks prelamanja elektromagnetnog talasa na granici dva savršena dielektrika definisan je odnosom brzina prostiranja faza

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c/v_2}{c/v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t}.$$



Kada je $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ tada je $n = \operatorname{tg} \theta_i$ i pošto je $\theta_r = \theta_i$ sledi da su u ovom slučaju pravci odbijenog i prelomljenog talasa međusobno upravni.

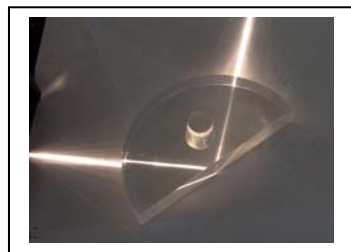
Dakle, kad je $\theta_i = \arctg n$ tada je i *Fresnelov* koeficijent $R_p = 0$ što znači da u odbijenom talasu paralelna komponenta iščezava. Odbijeni talas je linearno polarizovan i vektor električnog polja osciluje samo u pravcu koji je normalan na ravan incidencije. Do ovog rezultata došao je *Sir David Brewster* (1781-1868).

20 - Totalna refleksija

Kod savršenih dielektrika, iz *Snellovog* zakona,

$$\sin \theta_t = n \sin \theta_i = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_i,$$

postaje jasno da, ako je $n_1/n_2 > 1$ tj. ako je $v_1 < v_2$, sledi da je $\sin \theta_t > 1$. To znači da se ne javlja prelomljeni talas i to je totalna refleksija. Iz optike je zato nasleđena definicija:



Ako se talas prostire iz optički gušće sredine ka optički ređoj sredini dolazi do totalne refleksije na granici te dve sredine.

Pošto je $\sin \theta_t > 1$ to znači da je $\cos \theta_t = \pm j\sqrt{\sin^2 \theta_t - 1}$. *Fresnelovi* koeficijenti refleksije R_n i R_p su količnici čiji brojioci i imenioci su sada konjugovano kompleksne veličine. Moduo takvog izraza je jednak jedinici, što znači da je amplituda električnog polja reflektovanog talasa jednaka amplitudi upadnog talasa.

Iz *Fresnelovih* koeficijenata transmisije i opšteg oblika izraza za prelomljeni talas sledi da električno polje ipak prodire u drugu (optički ređu) sredinu, ali slabi po eksponencijalnom zakonu.

21 - EMT u kontinualno nehomogenom dielektriku

Ako je sredina kroz koju se prostire ravanski elektromagnetni talas nehomogena rešavanje matematičkih problemi postaje znatno složenije. Kad se elektromagnetne osobine sredine (ϵ, μ, σ) menjaju na rastojanjima koja su veća od talasne dužine, delovima takve dielektrične sredine moguće je pridružiti indeks prelamanja. Ova aproksimacija, koja je nazvana metod geometrijske optike, je sve tačnija što je talasna dužina manja. U ovom slučaju talasna jednačina za neku od komponenti elektromagnetnog polja je oblika

$$\Delta\phi + \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 \phi = 0, \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}.$$

U homogenoj sredini ($n = \text{const}$) rešenje talasne jednačine opisuje ravan-ski talas čija je amplituda konstantna i faza linearna funkcija koordinata. U posmatranom slučaju, $n = n(x, y, z)$ i pod učinjenim pretpostavkama, amplituda i faza su vrlo približno takve, tj. moguće je rešenje talasne jednačine pretpostaviti u obliku

$$\phi = \phi_0(x, y, z) e^{jF(x, y, z)},$$

gde je ϕ_0 sporo promenljiva amplituda i F skoro linearna funkcija koordinata. Tada je prvi parcijalni izvod po nekoj od koordinata $\zeta = x, y, z$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} = \frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta} e^{jF} + j\phi_0 e^{jF} \frac{\partial F}{\partial\zeta} \approx j\phi_0 e^{jF} \frac{\partial F}{\partial\zeta},$$

gde je prvi sabirak zanemaren jer je izvod sporopromenljive funkcije blizak nuli. Drugi parcijalni izvod je onda

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta^2} = j \frac{\partial\phi_0}{\partial\zeta} \frac{\partial F}{\partial\zeta} e^{jF} + j\phi_0 e^{jF} \frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2} - \phi_0 e^{jF} \left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)^2 \approx -\phi_0 e^{jF} \left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)^2,$$

gde je kao i kod prvog izvoda zanemaren prvi sabirak, a zatim i drugi kao mala veličina drugog reda. Tako se za laplasijen dobija

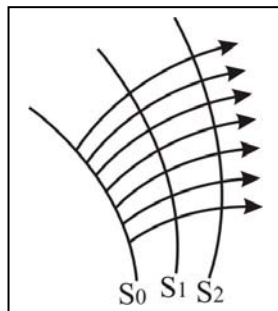
$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\phi_0 e^{jF} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right],$$

a talasna jednačina postaje:

$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2$	ili	$ \text{grad } F = \frac{n\omega}{c}$
---	-----	--

22 - Jednačina ajkonala

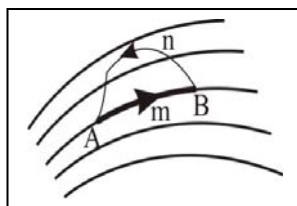
Rešenje dobijene diferencijalne jednačine određuje fazu elektromagnetnog talasa kao funkciju položaja. Jednačina je poznata kao jednačina ajkonala (Eng: *icon* - sličica). Što je frekvencija viša to je učinjena aproksimacija bolja. U graničnom slučaju $\omega \rightarrow \infty$ jednačina ajkonala zamenjuje talasnu jednačinu. Za zadatu frekvenciju i indeks prelamanja sredine desna strana jednačine ajkonala je konstanta $|\text{grad } F| = \text{const.}$ pa rešenja jednačine predstavljaju familiju ekvifaznih površina. Tokom prostiranja talasa svaki element ekvifazne površine se pomera u pravcu sopstvene normale te tako nastaju ortogonalne trajektorije koje nazivamo svetlosni zraci.



23 - Fermatov princip

U elektromagnetnom polju koje je formirano u kontinualno nehomogenom dielektriku jedna zamišljena zatvorena putanja sastoji se od dela koji se poklapa sa putanjom svetlosnog zraka i dela koji je sasvim proizvoljan. Polazeći od jednačine ajkonala za takvu putanju je:

$$\oint_C \text{grad } F d\vec{l} = \int_{AmB} \text{grad } F d\vec{l} + \int_{BnA} \text{grad } F d\vec{l} = 0,$$



jer je linijski integral gradijenta svake neprekidne funkcije po zatvorenoj površini jednak nuli. Duž dela putanje AmB vektori su kolinearni dok duž drugog delu putanje grade promenljiv ugao. Zbog toga je prvi sabirak po vrednosti manji od drugog i ustvari najmanji od svih mogućih koji bi bili formirani po putanji koja se ne poklapa sa optičkim putem. Dakle,

$$\int_{AmB} \text{grad } F d\vec{l} = \frac{\omega}{c} \int_{AmB} n dl = \omega \int_{AmB} \frac{1}{v} dl = \omega \int_{AmB} dt = \text{Minimum.}$$

Fermatov (Pierre de Fermat, 1601-1666) princip: Između dve tačke svetlost (elektromagnetni talas) se prostire po putanji za koju je vreme prostiranja najmanje. Iz ovog principa izводе se svi zakoni geometrijske optike.



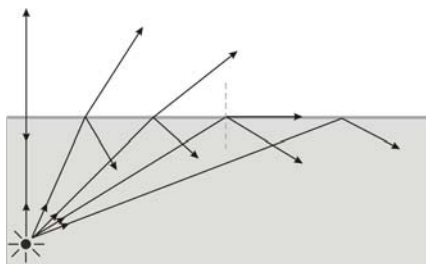
24 - *Descartes, Snell, Brewster, Fermat*

Coulombov zakon u elektrostatici je skoro savršena analogija sa *Newtonovim* zakonom gravitacije, ali je nastao sto godina kasnije.

Malo je poznato da su *Snellovi* zakoni prelamanja i refleksije zapravo *Descartesov* zakon sinusa, samo što se u tom zakonu ne pominje koeficijent prelamanja svetlosti.

Brewsterov zakon zapravo određuje samo jedan od uglova koji slede iz *Snellovih* zakona i za to je trebalo dvesta godina.

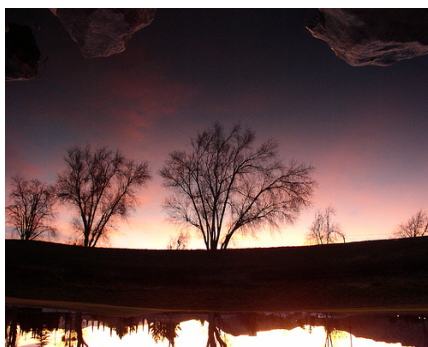
Fermatov princip je opšti princip mehanike. Svi procesi se odvijaju tako da utrošak energije bude minimalan.



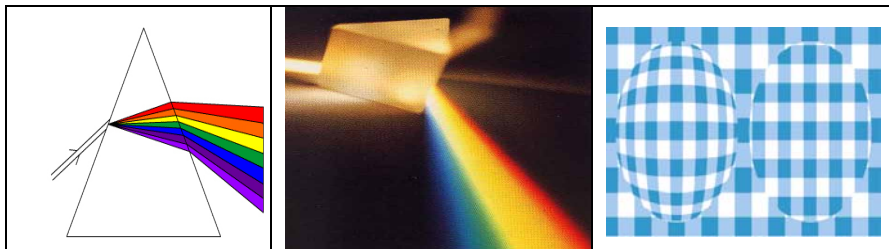
Kritični uglovi i totalna refleksija
monohromatski elektromagnetni talas



Totalna refleksija u prirodi
polihromatski elektromagnetni talas



25 - Oscilovanje elektrona pod dejstvom EMT



Poznato je da se složena svetlost pri prelamanju na graničnoj površini razlaže u spektar, što je vidljivo prilikom dvostrukog prelamanja kroz staklenu prizmu. Različite frekvencije prelamaju se pod različitim uglovima. Kako je $n = c/v = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ to za neferomagnetne materijale kod kojih je $\mu_r = 1$ sledi da je $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Međutim, ove veličine ne treba smatrati konstantnim za datu sredinu, već konstantnim za datu sredinu i na određenoj frekvenciji, $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)}$.

Elektroni u atomima osciluju oko svojih ravnotežnih položaja pod dejstvom kvazielastičnih sila u materiji. Ako je sopstvena frekvencija oscilovanja ω_0 i pravac oscilovanja, na primer, r -osa tako da je ravnotežni položaj u tački $r = 0$, tada je elastična sila data kao $-m\omega^2 r$. Upadni elektromagnetni talas $E = E_0 e^{j(\omega t - kr)}$ stvara dodatnu silu koja međutim ne pomera elektron znatno od ravnotežnog položaja ($r \approx 0$), pa je ova sila prostorno posmatrana skoro konstantna $qE_0 e^{j\omega t}$. Ove dve sile određuju ubrzanje koje elektron dobija, pa jednačina oscilatornog kretanja, $F = ma$, dobija oblik

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \frac{q}{m} E_0 e^{j\omega t}.$$

Partikularni integral ove diferencijalne jednačine je moguće pretpostaviti u obliku $z = r_0 e^{j\omega t}$, pa se zamenom dobija prvo amplituda oscilovanja r_0 i zatim konačno rešenje jednačine kretanja,

$$r = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{q}{m} E_0 e^{j\omega t}.$$

Odavde se zaključuje da elektron i dalje osciluje ali sada sa frekvencijom elektromagnetnog talasa.

26 - Normalna disperzija

Kad se elektron pomeri iz ravnotežnog položaja javlja se električni moment $\vec{p} = q\vec{r}$. Ako u jedinici zapremine ima N elektrona tada je vektor polarizacije

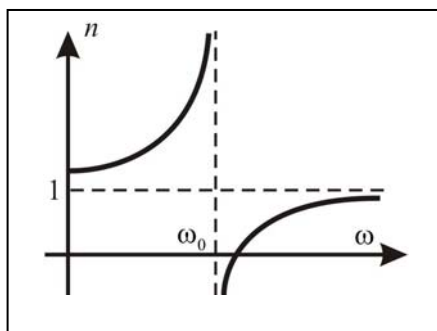
$$\vec{P} = N \vec{p} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{Nq^2}{m} \vec{E}.$$

S druge strane u linearnim sredinama je

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E},$$

pa se upoređivanjem poslednja dva izraza dobija zavisnost indeksa prelamanja od frekvencije

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}.$$



Za frekvencije $\omega < \omega_0$ sa porastom frekvencije indeks prelamanja se povećava, što odgovara ogledima iz optike. Za frekvencije $\omega > \omega_0$ indeks prelamanja ponovo raste težeći ka jedinici, što odgovara ogledima sa X zracima. Međutim, u okolini frekvencije ω_0 indeks prelamanja prema izvedenoj relaciji čini skok od $+\infty$ do $-\infty$. U toj tački imaginarni deo dielektrične konstante ima maksimum što odgovara maksimalnoj apsorpciji talasa na toj frekvenciji. Asimptota nije realno ponašanje materijala i to ne odgovara nikakvim eksperimentima. Tačni rezultati se dobijaju proučavanjem anomalne disperzije.

Razlog ovom neslaganju je činjenica da je zračenje dipola zanemareno i da atom nije predstavljen kao mnoštvo harmonijskih oscilatora. Svako ubrzavanje elektrona pri njegovom oscilovanju oko ravnotežnog položaja izaziva gubitak energije zračenjem. Međutim, spoljašnje električno polje taj gubitak stalno nadoknađuje. Da nema spoljašnjeg električnog polja elektron bi se zaustavio u ravnotežnom položaju. To znači da se usled sopstvenog zračenja elektrona vrši delimična apsorpcija elektromagnetne energije (svetlosti). Ako se ovaj gubitak energije shvati kao rezultat delovanje neke sile, onda bi ta sila bila neka sila otpora ili trenja i nazvana je reakciona sila zračenja. Usled odgovarajućeg gubitka energije zračenjem frekvencija emitovanog elektromagnetnog talasa nije striktno određena već je rasplinuta. Drugim rečima javlja se širina spektralnih linija.

27 - Prodiranje EMT u provodnike

Neka se talas prostire od površine provodnika ka unutrašnjosti i neka je na samoj površini provodnika amplituda magnetne komponente H_0 . Tada je

$$H_y = H_0 e^{-\alpha z} e^{-jkz} \quad \text{i} \quad E_x = Z_c H_y = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} H_0 e^{-\alpha z} e^{-jkz}.$$

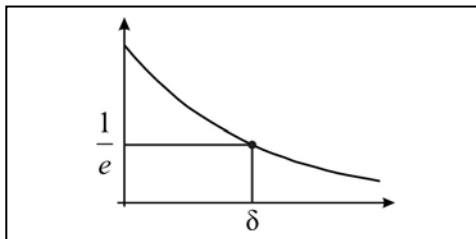
Zbog velike provodnosti, tj. male vrednosti modula karakteristične impedanse praktično sva energija je sadržana u magnetnom polju. Dakle, gustine energija nisu jednake kao kod idealnog dielektrika. Ovaj odnos je

$$\frac{w_m}{w_e} = \frac{\mu H^2}{\varepsilon E^2} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{1}{Z_c^2} \quad \text{i za dobre provodnike je reda } 10^9.$$

Kod dobrih provodnika slabljenje talasa je veliko. Kada talas pređe put

$$\delta = 1/\alpha = 1/\sqrt{\pi\mu\sigma f}$$

amplituda talasa opadne na vrednost $1/e = 0.368$, što odgovara slabljenju od jednog Nepera. Ova konstanta ima prirodu dužine i nazvana je dubina prodiranja. Za savršeni provodnik i bilo koju frekvenciju dubina prodiranja je jednaka nuli.



Za bakarnu površinu izloženu elektromagnetnom talasu frekvencije 1 MHz (što odgovara talasnoj dužini od 300 m u savršenom dielektriku) dobijaju se sledeći rezultati

σ	$5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$
μ	$12.56 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
α	15124 Neper/m
k	15124 rad/m
$ Z_c $	$0.4 \text{ m}\Omega$
v	415 m/s
λ	$415 \mu\text{m}$
δ	$66 \mu\text{m}$

Na površini provodnika *Poyntingov* (*John Henry Poynting*, 1852-1914) vektor je normalan na površinu i ima intenzitet:

$$\Gamma = \frac{1}{2} E_x H_y^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} H_0^2.$$

Aktivna snaga koju apsorbuje provodnik kroz površinu S je

$$P = \text{Re}[\Gamma] S = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_0^2 S = \frac{1}{2} R_s H_0^2 S.$$

Veličina R_s ima prirodu otpornosti i nazvana je površinska otpornost provodnika.

28 - Površinski (*Skin*) efekat

Elektromagnetni talas prati talas kondukcione struje, te kako je za dobre provodnike $\alpha = k$ sledi.

$$J_x = \sigma E_x = \sqrt{\omega \mu \sigma} \alpha H_0 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-\alpha z} e^{-jkz}.$$

Ova struja je lokalizovana u tako tankom sloju po površini provodnika pa se uvodi pojam površinske struje, čija je podužna gustina jednaka amplitudi magnetnog polja na površini provodnika,

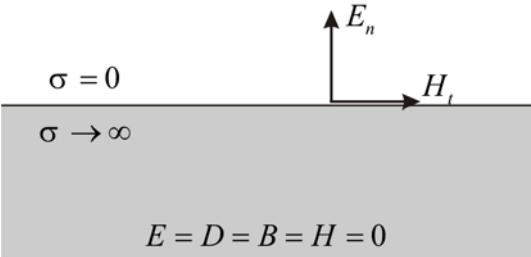
$$\boxed{J_s = H_0} \quad J_s = \int_0^\infty J_x dz = \sqrt{2} \alpha (1 + j) \frac{\sqrt{2}}{2} H_0 \int_0^\infty e^{-(1-j)\alpha z} dz = H_0,$$

što je očigledno realna veličina.

Ova pojava poznata je kao površinski efekat ili skin efekat. Zahvaljujući tome pri visokim frekvencijama provodnici mogu biti i šuplji. Gubici zbog prodiranja elektromagnetnog talasa u provodnik i koji se pretvaraju u toplotu mogu se vrlo efikasno smanjiti ako se provodnik presvuče mikroskim slojem nekog plemenitog metala.

29 - Granični uslovi na površini idealnog provodnika

Iz prethodne analize sledi da je u unutrašnjosti idealnog provodnika promenljivo električno i promenljivo magnetno polje jednako nuli. Na površini provodnika postoje površinski raspodeljena naelektrisanja i površinske struje. Na površini provodnika električno polje ima samo normalnu komponentu, a magnetno polje samo tangencijalnu komponentu. Iz opštih graničnih uslova sledi formulacija graničnih uslova za slučaj idealnog provodnika:

$\begin{aligned} \hat{n} \vec{D} &= \eta \\ \hat{n} \times \vec{E} &= 0 \\ \hat{n} \vec{B} &= 0 \\ \hat{n} \times \vec{H} &= \vec{J}_s \end{aligned}$	$H_n = E_t = 0, \quad E_n = \eta / \epsilon, \quad H_t = J_s$ 
---	---

30 - Stojeći EMT

Upadni (incidentni) ravanski elektromagnetni talas pod pravim uglom nailazi na ravnu električno savršeno provodnu površinu. Kako u unutrašnjosti provodnika ne može da postoji promenljivo elektromagnetno polje, prema zakonu o održanju energije, talas će biti odbijen (reflektovan). Neka je pravac prostiranja z i neka se provodna ravan nalazi u $z = 0$.

incidentno električno polje	reflektovano električno polje
$E_i = E_{0i} e^{j(\omega t - kz + \theta_i)}$	$E_r = E_{0r} e^{j(\omega t + kz + \theta_r)}$

Na površini provodnika mora da bude zadovoljen granični uslov da tangencijalna komponenta električnog polja iščezava, pa sledi $E = E_i + E_r = 0$. U ravni $z = 0$ to će biti ispunjeno ako su amplitude jednake i talasi fazno pomereni za π , tj. $E_{0i} = E_{0r}$ i $\theta_r = \theta_i - \pi$. Tako se dobija :

reflektovano električno polje	ukupno električno polje
$E_r = -E_i e^{j(\omega t + kz + \theta_i)}$	$E = 2jE_{0i} \sin kz e^{j(\omega t + \theta_i)}$

Realni deo poslednjeg izraza,

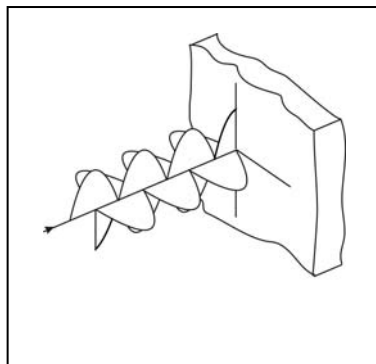
$$E = 2E_{0i} \sin kz \sin(\omega t + \theta_i),$$

predstavlja stojeći talas. Amplituda ukupnog električnog polja stalno je jednaka nuli u ravnima $z = -n\lambda/2$, koje su nazvane čvornim ravnima. Prva čvorna ravan je reflektujuća površina a ostale se nalaze na međusobnim rastojanjima koje su jednake polovini talasne dužine. Maksimumi su uvek u ravnima $z = -(2n+1)\lambda/4$.

Električno polje reflektovanog talasa jednoznačno određuje magnetno polje. Pošto električno polje reflektovanog talasa menja fazu za π , faza magnetnog polja nakon refleksije mora ostati ista, da bi *Poyntigov* vektor, $\vec{\Gamma} = \vec{E}_r \times \vec{H}_r$, imao pravac suprotan pravcu incidentnog talasa. Ukupno magnetno polje je

$$H = \frac{2}{Z_c} E_{0i} \cos kz \cos(\omega t + \theta_i)$$

i fazno je pomeren za $\pi/2$ u odnosu na električno. Zbog toga nema prenosa energije u pravcu upravnom na ekvifazne ravni već samo stalna izmena energije između komponenti polja.



31 - EMT u jonizovanoj sredini

Pod dejstvom sunčeve aktivnosti u gornjim slojevima zemljine atmosfere nastaju slobodni joni i elektroni koji obrazuju jonosferu između rastojanja od 50 km do 500 km od površine zemlje. Prostiranje elektromagnetnih talasa kroz jonizovanu sredinu je od velikog značaja za radio tehniku jer se bitno menjaju uslovi prostiranja i to zato što pored struje dielektričnog pomeraja postoji i konvekciona struja nastala dejstvom elektromagnetnog talasa na nosioce naelektrisanja.

Ako se zanemari, kao znatno manja, komponenta sile koja potiče od uzajamnog dejstva nosilaca naelektrisanja, sila koja deluje na nosilac naelektrisanja je $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$. Odnos između amplituda električnog i magnetnog polja je jednak karakterističnoj impedansi slobodnog prostora pa se i drugi sabirak u izrazu za silu može zanemariti. Ostaje samo sila koja potiče od električne komponente ravnog prostoperiodičnog elektro-

magnetnog talasa, $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} = q\vec{E}_0 e^{i\omega t}$, gde je m masa nosioca naelektrisanja - jona ili elektrona. Integracijom se dolazi do izraza za pri-

bližnu brzinu kretanja čestice $\vec{v} = -j \frac{q}{\omega m} \vec{E} = -ju \vec{E}$, gde je u za datu

frekvenciju konstanta koja se naziva pokretljivost. U ovom slučaju konstanta integracije je projekcija brzine termičkog kretanja na pravac polja pa je za mnoštvo nosilaca naelektrisanja koji se kreću u svim pravcima i smerovima jednaka nuli.

Pozitivni jon (jezgro) vodonika je najlakši i ima 1830 puta veću masu od elektrona te je u toj meri i pokretljivost manja. Teži joni imaju još manji uticaj na formiranje konvekcione struje. Zato je jonosferu moguće razmatrati kao elektronski gas. Ako je N zapreminska koncentracija jona (broj jona u m^3) tada je gustina konvekcione struje

$\vec{J} = Nq\vec{v} = -j \frac{Nq^2}{\omega m} \vec{E}$. Ova struja fazno kasni za električnim poljem za $\pi/2$. Prva *Maxwellova* jednačina, kad se uzmu u obzir konvekciona struja i struja dielektričnog pomeraja, ima oblik

$$\text{rot} \vec{H} = -j \frac{Nq^2}{\omega m} \vec{E} + j\omega\epsilon_0 \vec{E} = j\omega\epsilon_0 \left(1 - \frac{Nq^2}{\epsilon_0 \omega m} \right) \vec{E} = j\omega\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

gde je sa ϵ_r obeležena ekvivalentna relativna konstanta jonizovane sredine. Očigledno da su ove dve struje u protivfazi.

32 - Osobine EMT u jonizovanoj sredini

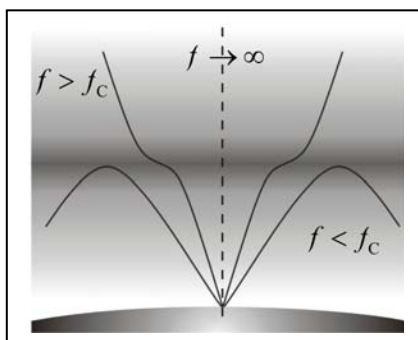
Veličina $\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{Nq^2}{m\epsilon_0}}$ ima prirodu frekvencije i nazvana je kritična frekvencija jonizovanog gasa. Red veličine koncentracije jona u jonosferi je 10^{12} pa je kritična frekvencija za elektronski gas $f_c = \sqrt{80.5N}$ i reda je veličine desetak MHz. Izraz za ekvivalentnu relativnu dielektričnu konstantu postaje:

$$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{f_c^2}{f^2}.$$

Fazna brzina je u ovom slučaju :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{1 - f_c^2 / f^2}},$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}.$$



Elektromagnetni signal se, kao i u svakoj disperzivnoj sredini, prenosi grupnom brzinom.

- Ako je $f > f_c$ potkorena veličina je pozitivna i brzina prostiranja faze je uvek manja od brzine svetlosti. Ekvivalentna dielektrična konstanta je pozitivna veličina i tek pri vrlo visokim frekvencijama, $f \gg f_c$, približava se vrednosti za slobodan prostor. Time se objašnjava zašto talasi malih talasnih dužina prolaze kroz jonosferu bez ometanja.
- Ako je $f < f_c$ potkorena veličina je negativna i brzina prostiranja faze postaje imaginarna veličina. To znači da kroz jonizovanu sredinu nije moguće prostiranje elektromagnetnih talasa ovih frekvencija. Zato je ova frekvencija i nazvana kritičnom. Time se objašnjava zašto se elektromagnetni talasi odbijaju od jonosfere, i kako se na niskim frekvencijama postižu rastojanja od nekoliko hiljada kilometara. Tačnije, indeks prelamanja u jonosferi se menja sa visinom (a zavisi i od godišnjeg doba i doba dana) pa se elektromagnetni talas povija po trajektoriji koja je konkavna prema zemlji.

Rastojanje za ostvarivanja zemaljske radio veze zavisi od upadnog ugla i frekvencije. Zbog slabljenja signala poželjno je da frekvencija bude što viša ali manja od kritične. Maksimalna upotrebljiva frekvencija, MUF, zavisi od rastojanja predajnika i prijemnika i stanja jonosfere.

33 - Grupna brzina

Brzina prostiranja faze je kinematički pojam vezan za prostoperiodične talase. Da bi pomoću ovakvog talasa neka informacija mogla da bude prenesena, talas je potrebno na neki način modulisati (oblikovati). Na primer amplitudno (AM talasi), frekventno (FM talasi), pulsno-kodno (PCM talasi) i td. Modulacijom talas prestaje da bude prostoperiodičan i stvaraju se grupe frekvencija. U disperzivnoj sredini svaka od prostoperiodičnih komponenti iz grupe prenosi se različitom faznom brzinom. Slaganjem prostoperiodičnih komponenti dobija se modulaciona anvelopa (obvojnica) koja u sebi nosi informaciju. Neka se, zbog jednostavnosti u izlaganju, talas sastoji od dve prostoperiodične komponente koje imaju jednake amplitude i različite ali bliske frekvencije. Tada je

$$\omega_1 + \omega_2 \approx 2\omega, \quad \omega_1 - \omega_2 \approx 2\Delta\omega, \quad k_1 + k_2 \approx 2k, \quad k_1 - k_2 \approx 2\Delta k,$$

$$\phi(t, r) = A_0 \cos(\omega_1 t - k_1 r) + A_0 \cos(\omega_2 t - k_2 r),$$

ili

$$\phi(t, r) = 2A_0 \cos\omega(t - \frac{r}{v}) \cos\Delta\omega(t - \frac{r}{v_g}) = A(t) \cos\omega(t - \frac{r}{v}),$$

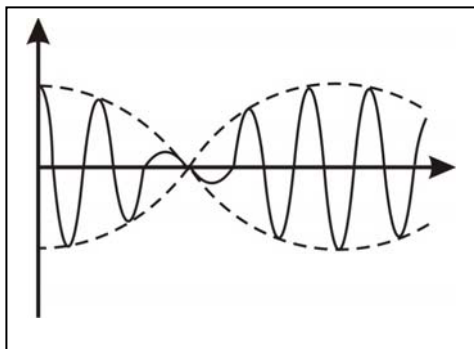
odakle je očigledno da je ovaj signal, poznat kao *izbijanje*, amplitudno modulisan.

Noseća frekvencija se prostire brzinom faze

$$v = \frac{\omega}{k},$$

a anvelopa, koja sadrži informaciju, brzinom grupe

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$



Ako se sa diferencijale pređe na diferencijale, sledi

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{v} \right)} = \frac{v}{1 - \frac{\omega}{v} \frac{dv}{d\omega}}.$$

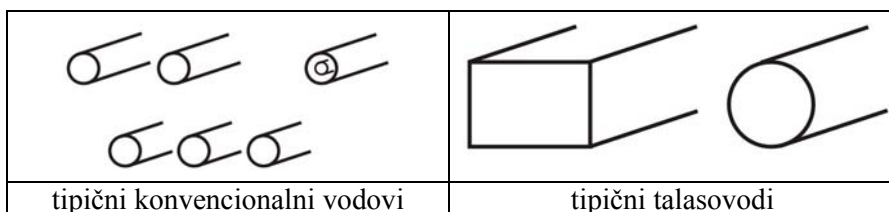
U nedisperzivnim sredinama ($\sigma \rightarrow 0$) brzina ne zavisi od frekvencije pa je izvod u poslednjem izrazu jednak nuli i obe brzine su jednake. Na isti način se pokazuje da u jonizovanoj sredini u kojoj nema sudara proizvod faze i grupne brzine je jednak kvadratu brzine prostiranja svetlosti.

34 - Vodeni EMT

Pod pojmom vođeni elektromagnetni talasi podrazumeva se kanalisanje elektromagnetne energije u nekom željenom pravcu. To se ostvaruje pomoću vodova i talasovoda.

- **Vodovi** - Pod pojmom vodovi ili konvencionalni vodovi se podrazumevaju sistemi linijskih provodnika koji se satoje od najmanje dva provodnika. Ovi sistemi prenosa elektromagnetne energije mogu biti otvoreni i zatvoreni. Otvoreni vodovi su dvožični ili višežični, obično paralelni (kao što je sistem prenosa električne energije industrijske frekvencije) i mogu biti nadzemni (vazdušni) i podzemni. Kod ovih vodova se formira osnovni tip elektromagnetnog talasa - Transverzalni Elektromagnetni Talas ili TEM, kod koga su vektori električnog, magnetnog polja i pravca prostiranja međusobno upravni. Drugi tipovi talasa su ipak mogući kad je rastojanje između provodnika reda talasne dužine, što uglavnom nije slučaj u primenama. Zatvoreni sistem je koaksijalan vod. Prednost koaksijalnih vodova je u tome što niti zrače elektromagnetnu energiju niti je primaju sa strane iz neželjenog pravca.
- **Talasovodi** - Pod pojmom talasovoda podrazumevaju se metalne šuplje cevi proizvoljnog, ali obično pravougaonog ili kružnog, poprečnog preseka. Talasovodi se koriste za kanalisanje elektromagnetne energije čije su frekvencije iznad 3 GHz. I pored toga što su talasovodi sistemi za kanalisanje elektromagnetne energije kao što su i konvencionalni vodovi izdvajaju se kao poseban sistem i to zbog konstrukcije, ali pre svega što u talasovodu TEM talasi nisu mogući. U talasovodu se mogu prostirati Transverzalni Električni Talas ili TE, koji u pravcu prostiranja ima magnetnu komponentu polja i Transverzalni magnetni talas ili TM, koji u pravcu prostiranja ima električnu komponentu. Prednost talasovoda u odnosu na koaksijalni vod je u lakšoj i jeftinijoj izradi, ali pre svega u znatno manjem slabljenju. Kod koaksijalnog voda pretežan deo gubitaka je u centralnom provodniku i dielektriku koji ga pri- država, dakle u elementima koji u talasovodu uopšte ne postoje.

Vodovima i talasovodima posvećena su posebna predavanja.



35 - EM Zračenje

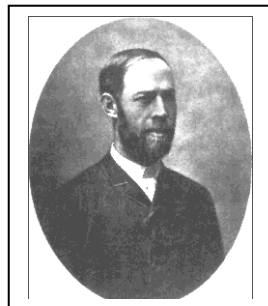
Maxwell se nije potrudio da i eksperimentalno dokaže postojanje elektromagnetnih talasa, možda zbog toga što je bio potpuno ubeđen u savršenost zaključaka do kojih je došao čisto matematičkim putem, a možda zbog toga što su većini njegovih savremenika ti zaključci bili tako neobični da njegove ideje uopšte nisu shvatali ozbiljno. Njegovom učenju su se divili kao izvanrednom umetničkom delu, a često se i sami iščuđavali blistavoj igri formula i duhovitom kuriozitetu.

Zasluga što je dokazano postojanje elektromagnetnih talasa pripada *Hertzu* (*Heinrich Rudolf Hertz*, 1857-1894) Pomoću najjednostavnijih uređaja (koji su bili toliko jednostavni da su i oni sumnjičavi mogli sami da se uvere) *Hertz* je između 1886. i 1888. godine eksperimentalno potvrdio *Maxwellovu* teoriju. Konstruisao je električni dipol sa naizmeničnom promenom naelektrisanja na njegovim krajevima. Električni moment ovog dipola, kao i u elektrostatici, je

$$\vec{p}(r, t) = q(r, t) \vec{l}.$$

Međutim, i struja u provodniku koji spaja krajeve dipola, koji je nazvan *Hertzov* oscilator, je promenljiva,

$$\frac{\partial \vec{p}(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial q(r, t)}{\partial t} \vec{l} = \vec{J}(r, t),$$



te je radi utvrđivanja elektromagnetnog polja prouzrokovanog električnim oscilacijama u dipolu *Hertz* uveo vektor $\vec{\Pi}$.

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{4\pi r} \vec{p}(t - r/v).$$

Ovaj vektor zadovoljava talasnu jednačinu:

$$\Delta \vec{\Pi} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \vec{p}.$$

Desna strana jednačine pokazuje da je izvor promenljivog elektromagnetnog polja vremenski promenljiv dipolni moment. Rešenje ove jednačine je u formi polja u zakašnjenju

$$\vec{\Pi}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\vec{p}(r', t - R/v)}{R} dV', \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

36 - Prenos EM energije

Ipak, u to vreme niko nije pomišljao na bilo kakvu primenu ovog pronalaska. Primena je omogućena tek kad je *Branly* (*Edouard Branly*, 1844-1940) konstruisao 1890. godine osetljiv uređaj za detekciju elektromagnetnih talasa proizvedenih *Hertzovim* oscilatorom, koji je nazvao koherer. U isto vreme elektromagnetnim talasima su se bavili *Tesla* (*Nikola Tesla*, 1856-1943) i *Popov* (*Aleksander Stepanovich Popov*, 1859-1906). *Popov* je 1895. godine prikazao uređaj za detektovanje elektromagnetnih talasa nastalih atmosferskim pražnjenjem. Prijemni deo uređaja se sastojao od žice vezane za balon. Bila je to zapravo prva žičana antena. *Popov* je nastavio eksperimente i već sledeće godine je pomoću telegrafskog pisaca uspeo da na daljinu od 250 m prenese dve reči:

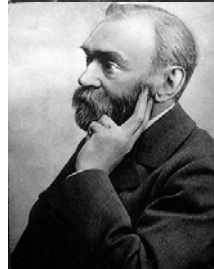
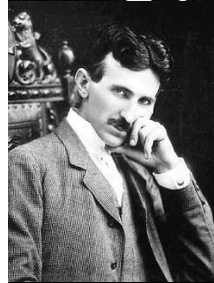
Heinrich Hertz

Dve godine kasnije ostvaren je domet od 9 km. Na samom početku bezžične telegrafije slične eksperimente izvodio je i *Marconi* (*Guglielmo Marconi*, 1874-1937), koji posle prvih uspeha u Londonu osniva telegrafsku agenciju. *Marconi* je pomoću antena koje se sastoje od žice i balona 1901. godine uspeo da premosti Atlantik. Najverovatnije zbog tog uspeha je 1909. godine primio *Nobelovu* (*Alfred Nobel*, 1833-1896) nagradu.

Međutim, prvi telekomunikacioni uređaj je načinio *Tesla* o čemu svedoči presuda Vrhovnog suda SAD. *Nobelovu* nagradu koju je dobio sa znatnim zakašnjenjem je odbio da primi.

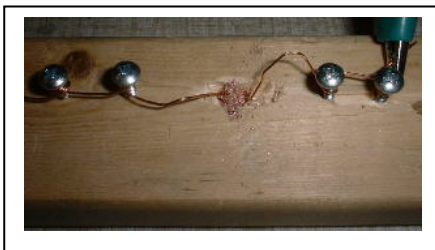
Događaji su se smenjivali sve brže. Prvo su brodovi počeli da koriste bezžične veze. U Nemačkoj je 1920. godine proradio prvi predajnik jačine 2 kW koji je emitovao muziku. Sledeće godine u Francuskoj je proradio predajnik čije je komercijalno ime bilo *RADIOLA*, i odatle potiče sinonim radio za svaki bezžični prenos. U Velikoj Britaniji je 1922. godine osnovana kompanija *British Broadcasting Company* ili *BBC* koja je tada imala čak tri predajnika.

*Branly, Tesla,
Popov, Marconi,
i Nobel.*

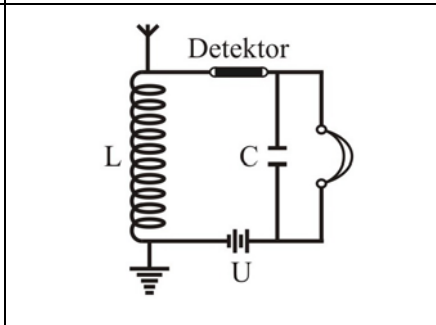
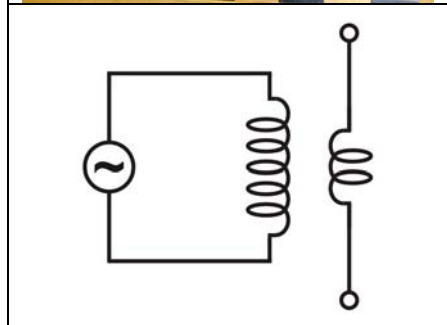
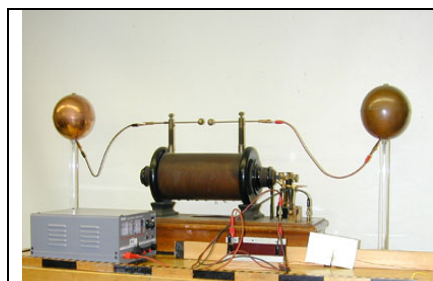


37 - Hertzov dipol i Branlyjev koherer

Davno je primećeno da se naelektrisane čestice prašine u vazduhu međusobno spajaju u formu konca. Takođe, poznato je da su kišne kapi znatno krupnije za vreme grmljavine. Naziv koherer (Grk. *cohaerens* - koji se drži zajedno) zapravo odatle potiče, a predstavlja primitivan uređaj za detekciju elektromagnetnog poremećaja. Koherer se sastoji od staklene (često ali ne obavezno) vakumirane cevčice sa dva metalna čepa na takom malom rastojanju da provodnost između metalnih čepova postoji, ali je zanemarljiva. Princip detekcije se sastoji u nesavršenom kontaktu. Na ovom principu rade i svi mikrofoni i slušalice koji su punjeni ugljenim prahom, a koji su do skoro bili u upotrebi, i još uvek postoje.



U promenljivom elektromagnetnom polju provodnost se povećava i uspostavlja se strujni krug. Dakle, ovakav koherer je upotrebljiv samo kao detektor elektromagnetnog polja, tj. radi kao prekidač i nije ga moguće upotrebiti za praćenje složenih elektromagnetnih talasa. U prvobitnim eksperimentima izvor elektromagnetnog poremećaja je bila varnica. Koherer je bio osnova za prvu bezžičnu telegrafiju i ostao je u upotrebi desetak godina. Koherer su zamenili kristalni detektori. Sredinom dvadesetog veka koherera su se setili proizvođači teledirigovanih igračaka.



38 - Hertzov dipol

Hertzov dipol je najjednostavniji sistem za zračenje (emitovanje) elektromagnetnih talasa. Sastoji se kratkog tankog provodnika na čijim krajevima se nalaze male sfere koje imaju ulogu kapacitivnika koji se naizmenično pune i prazne te u kratkom provodniku održavaju promenljivu struju, $i(t) = dq/dt$. Mada nije od značaja za analizu koja sledi, može se zamisliti da se u centar dipola dovodi naizmenični napon koji tako održava prinudne električne oscilacije. Ako je dipol postavljen kolinearno sa z -osom, tako da je generator u tački $z = 0$, magnetni vektor potencijal ima samo z komponentu, a električni skalar potencijal je jednak zbiru potencijala koji stvaraju kvazi-tačkasta naelektrisanja na krajevima dipola.

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i(t-r/v)}{r} l, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{q(t-r_1/v)}{r_1} - \frac{q(t-r_2/v)}{r_2} \right).$$

Na velikim rastojanjima od dipola, $r \gg l$, $\Delta r \rightarrow 0$, vrlo približno je

$$r_1 = r - \Delta r, \quad r_2 = r + \Delta r, \quad 2\Delta r = l \cos \theta.$$

Na osnovu definicije prvog izvoda neprekidne funkcije moguće je načiniti aproksimaciju oblika

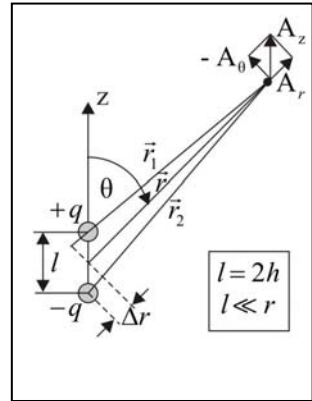
$$f(x - \Delta x) - f(x + \Delta x) \approx -\frac{df(x)}{dx} 2\Delta x$$

pa izraz za električni skalar potencijal postaje

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{v} \frac{dq(t-r/v)/dt}{r} - \frac{q(t-r/v)}{r} \right) l \cos \theta$$

Komponente polja su jednoznačno određene iz potencijala kao

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}.$$



U sfernom koordinatnom sistemu za komponente elektromagnetnog polja se dobijaju izrazi

$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{v} \frac{i(t-r/v)}{r^2} + \frac{q(t-r/v)}{r^3} \right) l \cos \theta$	$H_r = 0$
$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{v^2} \frac{di(t-r/v)/dt}{r} + \frac{1}{v} \frac{i(t-r/v)}{r^2} + \frac{q(t-r/v)}{r^3} \right) l \sin \theta$	$H_\theta = 0$
$E_\varphi = 0$	$H_\varphi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{v} \frac{di(t-r/v)/dt}{r} + \frac{i(t-r/v)}{r} \right) l \sin \theta$

39 - Hertzov dipol kao harmonijski oscilator

Neka se struja u dipolu menja po zakonu $\cos \omega t$, tada je

$$\begin{aligned} i(t - r/v) &= I \cos(\omega t - kr) \\ \frac{d}{dt} i(t - r/v) &= -\omega I \sin(\omega t - kr) \\ q(t - r/v) &= \int i(t - r/v) dt = \frac{I}{\omega} \sin(\omega t - kr) \end{aligned}$$

pa se za komponente elektromagnetnog polja dobija:

$E_r = \frac{Il}{2\pi} Z_c \left(\frac{\cos(\omega t - kr)}{r^2} + \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr^3} \right) \cos \theta$
$E_\theta = \frac{Il}{4\pi} Z_c \left(-\frac{k \sin(\omega t - kr)}{r} + \frac{\cos(\omega t - kr)}{r^2} + \frac{\sin(\omega t - kr)}{kr^3} \right) \sin \theta$
$H_\phi = \frac{Il}{4\pi} \left(-\frac{k \sin(\omega t - kr)}{r} + \frac{\cos(\omega t - kr)}{r^2} \right) \sin \theta$

Komponente elektromagnetnog polja zavise od rastojanja kao recipročni stepeni od jedan do tri. Međutim, u toj zavisnosti učestvuje i talasna dužina (kroz faznu tj. talasnu konstantu) te je slabljenje polja uvek po zakonu $1/r^2$.

- U bliskoj zoni, ili zoni indukcije, dakle na malim rastojanjima od dipola, $r \ll \lambda$, preovlađuje uticaj članova koji od rastojanja zavise kao $1/r^3$.
- U dalekoj zoni, ili zoni zračenja, dakle na velikim rastojanjima od dipola, $r \gg \lambda$, preovlađuju članovi koji od rastojanja zavise kao $1/r$.
- Oštra granica između zone indukcije i zone zračenja ne postoji. Međutim, ako se posmatra jačina magnetnog polja tada iz odnosa amplituda indukcione komponente i komponente zračenja sledi $H_{ind} / H_{zra} = \lambda / 2\pi r$. Na rastojanjima od dipola koja su približno šestina talasne dužine amplitude ove dve komponente su jednake. Na sto puta većim rastojanjima, dakle na rastojanju od oko $15-16\lambda$, preovlađuje komponenta zračenja, kad je amplituda idukcione komponente oko jedan procenat amplitude zraćeće komponente.

40 - Zone prostiranja EMT

Kad se u izrazima za električno i magnetno polje zanemare članovi koji ne preovlađuju na datom rastojanju, dobijaju se pojednostavljeni i dovoljno tačni izrazi koji su upotrebljivi za zone indukcije i zračenja. Često se ove zone nazivaju prema naučnicima koji su, međutim, proučavali ultra zvuk.

Polje u zoni indukcije ili bliskoj zoni	Polje u zoni zračenja ili dalekoj zoni
$E_r = \frac{1}{2\pi} \frac{Il}{\omega \epsilon r^3} \sin(\omega t - kr) \cos \theta$	$E_r \approx 0$
$E_\theta = \frac{1}{4\pi} \frac{Il}{\omega \epsilon r^3} \sin(\omega t - kr) \sin \theta$	$E_\theta = -\frac{1}{4\pi} Z_c \frac{kIl}{r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta$
$H_\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{Il}{r^2} \cos(\omega t - kr) \sin \theta$	$H_\phi = -\frac{1}{4\pi} \frac{kIl}{r} \sin(\omega t - kr) \sin \theta$
<i>Fraunhoferova zona</i>	<i>Fresnelova zona</i>
<i>Joseph von Fraunhofer</i> (1787-1826) 	 <i>Augustin Jean Fresnel</i> (1788-1827)

- U bliskoj zoni (zona indukcije) je moguće zanemariti efekat kašnjenja koji je predstavljen članom kr sa negativnim znakom.
- Ako se u izrazima za komponente električnog polja u bliskoj zoni izostavi vremenska zavisnost tada izrazi postaju identični onima za elektrostatički dipol.
- Ako se u izrazu za komponentu magnetnog polja u bliskoj zoni izostavi vremenska zavisnost tada se dobija izraz za jačinu magnetnog polja strujnog elementa, tj. *Ampere-Laplaceov* obrazac.
- Samo u dalekoj zoni (zona zračenja) komponente elektomagnetnog polja su vezane karakterističnom impedansom prostora.
- U bliskoj i prelaznoj zoni neophodno je uzeti u obzir sve članove u izrazima za komponente elektromagnetnog polja ili vršiti precizna merenja, i to važi za sve zračeće strukture.

42 - *Coulomb i Hertz* - odakle potiče EM zračenje?

Neka je tačkasto naelektrisanje q promenljivo u vremenu, $q = q(t)$. Prvi izvod ove promene je po definiciji

$$\frac{dq(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}. \text{ Smenama } t = t - r/v, \Delta t = r/v, \text{ se dobija}$$

$$\frac{\partial q(t)}{\partial t} = \lim_{r/v \rightarrow 0} \frac{q(t) - q(t - r/v)}{r/v}, \text{ ili pošto se obe strane pomnože sa } r/v,$$

$$\lim_{r/v \rightarrow 0} \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial t} q(t - r/v) = q(t) - \lim_{r/v \rightarrow 0} q(t - r/v), \text{ sledi}$$

$$q(t) = \lim_{r/v \rightarrow 0} \left(q(t - r/v) + \frac{r}{v} \frac{\partial}{\partial t} q(t - r/v) \right). \text{ U ovom izrazu je moguće izo-}$$

staviti graničnu vrednost jer je r/v inače veoma mala veličina. Na primer, za $r = 300 \text{ m}$, i $v = c$ je $r/v = 1 \mu\text{s}$. Za bilo koje veće rastojanje to je tim pre moguće, pa sledi

$$q(t) = q(t - r/v) + \frac{r}{v} i(t - r/v),$$

gde je izvod naelektrisanja po vremenu zamenjen oznakom za trenutnu vrednost jačine struje. Izraz za električno polje usamljenog promenljivog tačkastog naelektrisanja sledi direktno iz Coulombovog zakona, pa je

$$\vec{E}(r, t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(q(t - r/c) + \frac{r}{v} i(t - r/v) \right) \frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Prvi sabirak očigledno potiče iz Coulombovog zakona u koji je uključeno kašnjenje zbog konačne brzine prostiranja promene. Drugi sabirak potiče od brzine kojom se količina naelektrisanja menja.

Radialna komponenta električnog polja elektrostatičkog dipola je od ranije poznata i data je izrazom

$$E_r(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \frac{l \cos \theta}{r^3}. \text{ Kad je količina naelektrisanja}$$

promenljiva u vremenu, umesto q u poslednji izraz treba uvrstiti $q(t)$ pa se dobija već poznat izraz za radialnu komponentu električnog polja *Hertzovog* dipola.

$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\frac{q(t - r/v)}{r^3} + \frac{1}{v} \frac{i(t - r/v)}{r^2} \right) l \cos \theta$
<i>Coulomb</i> <i>Hertz</i>

43 - Snaga i otpornost zračenja *Hertzovog* oscilatora

U zoni zračenja vektori $\vec{r}$, $\vec{E}$ i $\vec{H}$ grade ortogonalni trijedar desne orijentacije, što znači da su elektromagnetni talasi TEM tipa. Električno i magnetno polje su u fazi, a odnos jačina im je jednak karakterističnoj impedansi sredine. *Pointyngov* vektor ima pravac $\vec{r}$, a trenutna vrednost,

$$\Gamma(t, r) = E_\theta H_\phi = Z_c \frac{k^2 I^2 l^2}{4\pi r^2} \sin^2 \theta \sin^2(\omega t - kr),$$

je stalno pozitivna što znači da u toku celog perioda (tj. stalno) dipol radijalno emituje elektromagnetnu energiju u okolni prostor. Srednja vrednost u vremenu ovog vektora je

$$\Gamma_{sr}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T \Gamma(t, r) dt = Z_c \frac{k^2 (Il)^2}{8\pi r^2} \sin^2 \theta.$$

Snaga zračenja dipola je jednaka fluksu *Pointyngovog* vektora kroz proizvoljnu zatvorenu površinu koja obuhvata dipol. Ako se za površinu odabere sfera sa centrom u centru dipola, tada je

$$P = \oint_S \Gamma_{sr}(r) ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \Gamma_{sr}(r) r^2 \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{2\pi}{3} Z_c \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 I_{eff}^2 = R_z I_{eff}^2,$$

pri čemu je talasna (fazna) konstanta zamenjena vrednošću $k = 2\pi/\lambda$ i gde je $I_{eff} = I/\sqrt{2}$ efektivna vrednost struje.

- Veličina R_z ima dimenziju otpornosti, dakle to je otpornost zračenja, i u izrazu za snagu zračenja predstavlja isto što i termogena otpornost u izrazu za snagu koja se troši na nekom otporniku u kolu naizmenične struje.
- Za određenu struju, snaga zračenja direktno je proporcionalna kvadratu odnosa dužine dipola i talasne dužine.
- Za datu dužinu dipola snaga zračenja je direktno proporcionalna kvadratu frekvencije. Tako se dolazi do objašnjenja zašto kratki provodnici na visokim frekvencijama vrlo efikasno zrače.

44 - Pocklingtonova integro-diferencijalna jednačina

Simetrična cilindrična antena (dipol) sastavljena je od dve savršeno provodne žice, $\sigma \rightarrow \infty$, jednakih dužina, h , i poluprečnika koji je znatno manji od talasne dužine, $a \ll \lambda$ i napaja se u centru. S obzirom na vitkost antene, moguće je učiniti pojednostavljenje smatrajući da struja protiče po osi antene. Magnetni vektor potencijal ima samo z -komponentu.

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} dz'$$

gde je $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Izraz za električno polje,

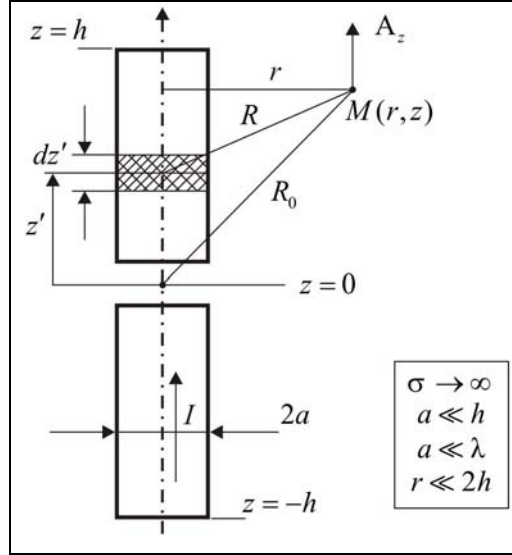
$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - j\omega A_z,$$

pomoću Lorentzovog uslova,

$$\phi = j \frac{v}{k} \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

postaje

$$E_z = -j \frac{v}{k} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right).$$



Kad se izraz za magnetni vektor potencijal uvrsti u izraz za električno polje dobija se:

$$E_z = -j \frac{v}{k} \frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h I(z') \left(\frac{\partial}{\partial z^2} \frac{e^{-jkR}}{R} + k^2 \frac{e^{-jkR}}{R} \right) dz'.$$

Na površini antenskog provodnika tangencijalna komponenta totalnog električnog polja je jednaka nuli, $(E_z + E_z^i)|_{r=a, -h \leq z \leq h} = 0$, gde je E_z^i tangencijalna komponenta incidentnog električnog polja, pa sledi Pocklingtonova integro-diferencijalna jednačina.

$$\frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{r=a} dz' = -j \frac{k}{v} E_z^i.$$

U ovoj integralnoj jednačini nepoznata je funkcija raspodele struje duž antenskog provodnika. Kad se izvrše diferenciranja postaje jasno da jezgro jednačine sadrži članove koji su proporcionalni sa $1/R, 1/R^2, 1/R^3$, dakle isto kao kod Hertzovog dipola.

45 - Hallenova integralna jednačina

Pocklingtonova integralna jednačina je oblika $\left(\frac{\partial}{\partial z^2} + k^2\right)F(z) = S(z)$ i funkcija $F(z)$ može biti određena kao rešenje nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda,

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{r=0a} dz' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - j \frac{1}{v} \int_0^z E_z^i(s) \sin k(z-s) ds ,$$

što je poznata Hallenova integralna jednačina.

Prva dva sabirka predstavljaju rešenje odgovarajuće homogene jednačine, a treći sabirak je partikularni integral dobijen *Lagrangeovim* (*Josef Luis Conte de Lagrange*, 1736-1813) metodom varijacije konstanti. Konstante integracije su trenutno neodređene. Zbog pogodnog oblika jezgra koje sadrži samo član proporcionalan sa $1/R$ ova jednačina je u vrlo čestoj upotrebi.

46 - Napajanje dipola delta generatorom

Pod delta generatorom podrazumeva se incidentno električno polje oblika $E_z^i = U \delta(z)$ gde je $\delta(z)$ Diracova (*Paul Dirac*, 1902-1813) delta funkcija definisana na sledeći način:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z') \delta(z - z') dz' = f(z) . \quad \text{Površina koju gradi } \delta \text{ funkcija je}$$

uvek jednaka jedinici. To postaje očigledno ako je funkcija f konstanta.

Dakle, dipol je napajan naponom U između početaka antenskih provodnika koji se nalaze na nultom rastojanju. Samo u retkim slučajevima antene se direktno priključuju na predajnik ili prijemnik. Obično se to čini koaksijalnim ili dvožičnim vodom. Rastojanja između provodnika tih vodova su znatno manja od radne talasne dužine pa antena ima dva električno bliska priključka. Teorijski gledano beskonačno tanak procep na dipolu ima beskonačnu kapacitivnost. Međutim, u zoni napajanja elektromagnetno polje je kvazistacionarno. U toj uskoj zoni predajna antena zamenjuje se koncentrisanom impedansom, a prijemna ekvivalentnim generatorom, pa se ulazna admitansa određuje kao i u teoriji električnih kola $Y_{ul} = I(0)/U$. To znači da je neophodno poznavati raspodelu struje duž antenskih provodnika, tj. rešiti integralnu jednačinu.

47 - Konstante u *Hallenovoj* integralnoj jednačini

Pri uslovima napajanja dipola delta generatorom integral na desnoj strani *Hallenove* integralne jednačine postaje tablični,

$$\int_0^z U \delta(s) \sin k(z-s) ds = U \sin kz, \text{ pa se konačno dobija}$$

$$\int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{r=a} dz' = \begin{cases} C_1 \cos kz + C_2 \sin kz, & z \geq 0 \\ C_3 \cos kz + C_4 \sin kz, & z \leq 0 \end{cases}.$$

gde su konstante posebno obeležene za donji i gornji antenski provodnik. Magnetni vektor potencijal je neprekidna i diferencijabilna funkcija, a električni skalar potencijal,

$$\varphi = j \frac{v}{k} \frac{\partial A_z}{\partial z} = jv \begin{cases} -C_1 \sin kz + C_2 \cos kz, & z \geq 0 \\ -C_3 \sin kz + C_4 \cos kz, & z \leq 0 \end{cases},$$

se u zoni napajanja skokovito menja, tj. $\varphi|_{z=0+} = U/2$ i $\varphi|_{z=0-} = -\frac{U}{2}$

odakle sledi da je $C_1 = C_3$ i $C_2 = -C_4 = -j \frac{U}{2v}$, pa sledi

$$\int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{r=a} dz' = \frac{4\pi}{\mu} C_1 \cos kz - j \frac{U}{2v} \frac{4\pi}{\mu} \sin k|z|.$$

Proizvod faktora $4\pi/\mu$ i konstante C_1 je takođe konstanta (ponovo obeležena kao C_1) koja tek treba da bude određena. Kad se dipol nalazi u vakuumu ili vazduhu faktor uz sinusni član postaje

$$\frac{4\pi}{2c\mu_0} = \frac{2\pi}{\mu_0} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi}{Z_0} = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60}, \text{ pa je konačno za vakuum}$$

$$\int_{-h}^h I(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \Big|_{r=a} dz' = C_1 \cos kz - j \frac{U}{60} \sin k|z|.$$

Na krajevima antenskih provodnika struja je jednaka nuli, $I(h) = I(-h) = 0$, pa se iz tog uslova određuje vrednost konstante C_1 . U čvoru važi prvi *Kirchoffov* zakon. Raspodela struje je parna funkcija. Sve ostalo u vezi raspodele struje duž antenskih provodnika je nepoznato.

48 - Beskonačno tanak dipol i sinusna raspodela struje

Kad je antena beskonačno tanka (idealno vitka) $a \rightarrow 0$, vrednost pod-integralne funkcije na levoj strani *Hallenove* integralne jednačine,

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{\cos k\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}} - j \frac{\sin k\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}},$$

postaje vrlo velika, čak ima beskonačnu vrednost u tačkama integracije, $z' = z$, što znači da veoma malo zavisi od funkcije koja opisuje raspodelu struje, pa je u ovom slučaju *Hallenova* integralna jednačina oblika

$$I(z) \int_{-h}^h \frac{e^{-jkR}}{R} \bigg|_{r=a} dz' = C_1 \cos kz - j \frac{U}{v} \frac{2\pi}{\mu} \sin k|z|.$$

Dominantna vrednost integrala se vrlo sporo menja pa se u prvoj aproksimaciji može zameniti konstantom. Tako se dobija

$$I(z) = C_1 \cos kz - j \frac{U}{v} \frac{2\pi}{\mu} \sin k|z|.$$

Na krajevima provodnika struja je jednaka nuli, $I(\pm h) = 0$, odakle sledi vrednost konstante C_1 , pa je konačno

$$I(z) = j \frac{2\pi U}{v\mu \cos kh} \sin k(h - |z|) = I_m \sin k(h - |z|)$$

gde je I_m maksimalna vrednost struje koja se javlja u tačkama na antenskim provodnicima $z = \pm(h - (2n - 1)\lambda / 4)$. Slično,

$$I(z) = I_0 \frac{\sin k(h - |z|)}{\sin kh},$$

gde je

$$I_0 = I(0) = j \frac{2\pi U}{v\mu \cos kh} \sin kh$$

jačina struje napajanja.

49 - Sinusni paradoks

Sinusna aproksimacija za raspodelu struje je asimptotsko rešenje *Hallenove* integralne jednačine i logično je pretpostaviti da se raspodela struje neće bitno promeniti i na tankim i umereno tankim antenama. Ova aproksimacija dovodi do zadovoljavajućih rezultata za karakteristiku zračenja, ali u nekim slučajevima dovodi do paradoksalnih rezultata za ulaznu impedansu antene i raspodelu struje.

Ulazna impedansa je

$$Z_{ul} = \frac{U}{I_0} = -j \frac{\nu \mu \cos kh}{2\pi \sin kh}.$$

- Prvo, očigledno je da ulazna impedansa nema realni deo što nije tačno.
- Drugo, dipoli čija je dužina provodnika jednaka umnošku polovine talasne dužine, $\sin kh = 0$, imaju beskonačnu ulaznu impedansu što nije moguće.
- Treće, ako dipol nema provodnike jednakih dužina (asimetričan dipol) tada je raspodela struje po sinusnoj aproksimaciji

$$I(z) = \begin{cases} I_{m1} \sin k(h_1 - z), & z \geq 0 \\ I_{m2} \sin k(h_2 + z), & z \leq 0 \end{cases}.$$

U centru dipola (tačka napajanja, $z = 0$) funkcija raspodele struje je neprekidna, pa je

$$I_{m1} \sin kh_1 = I_{m2} \sin kh_2$$

Ako jedan od provodnika ima dužinu $n\lambda/2$, drugi je nema, tada je na primer,

$$I_{m1} \sin n\pi = 0 = I_{m2} \sin kh_2$$

odale sledi da je $I_{m2} = 0$ što je paradoksalan rezultat.

- Četvrto, realni rezultati se dobijaju tek kad se raspodela struje aproksimira nekim drugim funkcijama, na primer stepenim ili trigonometrijskim polinomima.

50 - EM polje dipola u zoni zračenja

- Komponente EMT u zoni zračenja - U zoni zračenja kompleksni oblik komponenti elektromagnetnog polja koje potiču od strujnog elementa dužine dz' je

$dE_\theta = jZ_c \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} \sin \theta I(z') dz'$	$dH_\phi = \frac{1}{Z_c} dE_\theta$
--	-------------------------------------

- Električno polje i magnetni vektor potencijal - Kako je

$dA_\theta = dA_z \sin \theta = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta I(z') dz' \quad \text{sledi veza :}$	$dE_\theta = -j\omega dA_\theta$
--	----------------------------------

koja važi ne samo za prav simetrični dipol već za svaki sistem strujnih raspodela konačnih dimenzija.

Aproksimacija u amplitudi i fazi u zoni zračenja - Rastojanje tačke u kojoj se izračunava polje i zračećeg elementa dipola je

$$R(\vec{r}, \vec{r}') = r \sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos(\vec{r}, \vec{r}')}.$$

Kad se funkcija $1/R(\vec{r}, \vec{r}')$ razvije u red u okolini tačke $r' = 0$ i kad se zanemare svi članovi osim prvog, sledi aproksimacija u amplitudi

$\frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}')} \approx \frac{1}{r},$	koja je inače očigledna jer je $r'/r \ll 1$.
---	---

Međutim, kad se funkcija $R(\vec{r}, \vec{r}')$ razvije u red u okolini tačke $r' = 0$ neophodno uzeti u obzir prva dva člana reda, zbog toga što promene u dužini koje su reda talasne dužine bitno utiču na fazni stav svakog od elemenata pa bi u konačnom zbiru mogao da dobije pogrešan rezultat. Tako sledi da je

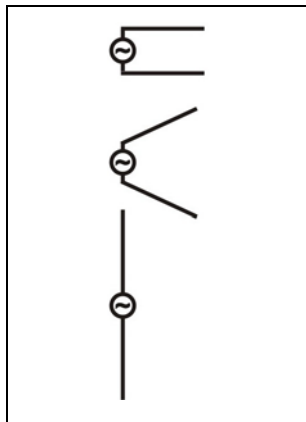
$R(\vec{r}, \vec{r}') \approx r - \hat{r} \vec{r}'.$	Za izabrani koordinatni sistem i polazaj koordinatnog početka u centru dipola je $R(\vec{r}, \vec{r}') \approx r - z \cos \theta$.
--	---

- EM polje u zoni zračenja - Uz navedene aproksimacije izraz za električno polje postaje

$E_\theta = jZ_c \frac{k}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \int_{-h}^h I(z') e^{-jkz \cos \theta} dz'$
--

51 - Karakteristika zračenja dipola

Sinusna raspodela struje duž antenskih provodnika, kao najjednostavnija aproksimacija, temelji se na činjenici da je raspodela struje ista kao na otvorenom vodu bez gubitaka. Kako dipol zrači elektromagnetnu energiju, sigurno je bolja aproksimacija raspodelu struje poistovetiti sa onom na otvorenom vodu sa gubicima. Međutim, kako je već istaknuto, i na ovaj način dobijaju se zadovoljavajući rezultati za karakteristiku zračenja. Dakle, kad se usvojena sinusna raspodela struje zameni u izraz za električno polje se dobija:

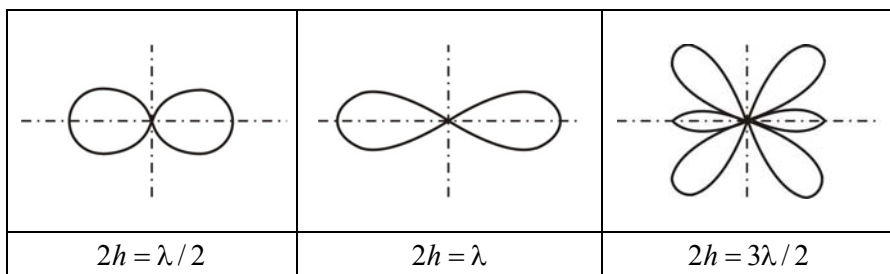


$$E_{\theta} = jZ_c \frac{k}{4\pi} \frac{I_m e^{-jkr}}{r} \sin \theta \int_{-h}^h \sin k(h - |z'|) e^{-jkz \cos \theta} dz'.$$

Integrali se jednostavno rešavaju kad se sinusna funkcija predstavi eksponencijalnim funkcijama, pa sledi

$E_{\theta} = jZ_c I_m \frac{e^{-jkr}}{2\pi r} F(\theta),$	gde je	$F(\theta) = \frac{\cos(kh \cos \theta) - \cos kh}{\sin \theta},$
--	--------	---

funkcija koja opisuje zavisnost polja od ugla koordinate θ ili karakteristična funkcija zračenja. Dijagram ove funkcije u polarnom koordinatnom sistemu je karakteristika zračenja. Oblik karakteristike zračenja zavisi od proizvoda talsne konstante i dužine antenskog provodnika, što je poznato kao električna dužina.



U najčešćoj upotrebi je polutalasni dipol, $2h = \lambda / 2$, čija karakteristika zračenja se vrlo malo razlikuje od Hertzovog dipola.

52 - Snaga i otpornost zračenja dipola

U zoni zračenja odnos jačina električne i magnetne komponente polja je jednak karakterističnoj impedansi, i kako su te komponente međusobno upravne, sledi da je

$$|\vec{\Gamma}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = E_{\theta} H_{\varphi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{Z_c} E_{\theta}^2 \quad \text{ i } \quad \Gamma_{sr} = \frac{1}{2Z_c} E_{\theta}^2.$$

Snaga zračenja dipola je jednaka, kao i kod *Hertzovog* dipola, fluksu srednje vrednosti u vremenu *Poyntingovog* vektora kroz sferu čija površina pripada zoni zračenja. Kako je

$$|E_{\theta}| = Z_c \frac{I_m}{2\pi r} F(\theta) \quad \text{ sledi da je } \quad P = Z_c \frac{I_m^2}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} F^2(\theta) \sin \theta d\theta,$$

jer je karakteristika zračenja rotaciono simetrična u odnosu na z osu, tj. zavisi samo od koordinate θ .

Otpornost zračenja je kao i kod *Hertzovog* dipola definisana kao

$$P = \frac{1}{2} R_z I_m^2 \quad \Rightarrow \quad R_z = \frac{Z_c}{2\pi} \int_0^{\pi} F^2(\theta) \sin \theta d\theta.$$

Integracija u poslednjem izrazu je jednostavna, ali obimna i dovodi do specijalnih funkcija. Ako se zbog skraćenog pisanja uvede oznaka $x = kh$, onda sledi

$$R_z = \frac{Z_c}{2\pi} \left((1 - \cos x) Ci(x) - \frac{1}{2} \cos x Ci(2x) - \sin x Si(x) + \frac{1}{2} \sin x Si(2x) \right),$$

gde su

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{ i } \quad Ci(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Sinus integral i Kosinus integral za čije se izračunavanje primenjuju posebni postupci.

Tako je na primer u vazduhu, $Z_c = Z_0 = 120\pi\Omega$, i za

$h = \lambda/4$	$R_z = 30Ci(2\pi) = 73.14\Omega$
$h = \lambda/2$	$R_z = 30(4Ci(2\pi) - Ci(4\pi)) = 199\Omega$

Na osnovu poznatih otpornosti zračenja i karakteristične funkcije zračenja lako se određuje jačina polja u funkciji snage,

$$|E| = \sqrt{2} E_{ef} = \frac{Z_c}{2\pi r} \sqrt{2P/R_z} F(\theta).$$

53 - Stepen korisnog dejstva i pojačanje antene

• Stepenn korisnog dejstva antene - Snaga termogenih (*Jouleovih*) gubitaka, P_j , je znatno manja u odnosu na snagu zračenja, P , pa se može smatrati da je snaga zračenja jednaka snazi kojom se antena napaja, $P_a = P + P_j$. Zato se u poslednjem izrazu za jačinu električnog polja umesto P može upotrebiti P_a , što je veličina koja se znatno lakše može odrediti. Međutim, u opštem slučaju je $P = \eta P_a$, gde je η koeficijent korisnog dejstva antene, $\eta = P / P_a = P / (P + P_j)$. Ako se otpornost termogenih gubitaka računa u odnosu na istu referentnu struju kao i otpornost zračenja tada je i $\eta = R_z / (R_z + R_j)$.

• Pojačanje antene - U opštem slučaju karakteristična funkcija zračenja zavisi od obe ugaone koordinate (θ, φ) sfernog koordinatnog sistema, pa na osnovu polarnog dijagrama nije uvek jednostavno odrediti direktivne karakteristike koje su neophodne kad god je potrebno usmereno zračenje. Zbog toga se u praksi koristi pokazatelj nazvan pojačanje ili dobitak antene (eng. *gain*) koji karakteriše efikasnost zračenja u određenom pravcu.

Izotropna antena je fiktivna antena koja u svim pravcima zrači podjednako. Kod posmatrane realne antene to naravno nije slučaj. Ako obe antene u određenoj tački i na određenom pravcu stvaraju polje iste jačine, tada se pojačanje antene definiše kao odnos snaga zračenja, tj.

$G(\theta, \varphi) = P_{izo} / P$	$g(\theta, \varphi) = 10 \log G(\theta, \varphi) [\text{dB}]$	za $E_{izo} = E$.
------------------------------------	---	--------------------

Pošto je za izotropnu antenu $\Gamma_{sr} = \frac{1}{2Z_c} E_{izo}^2 = \frac{P_{izo}}{4\pi r^2}$, sledi

$$E_{izo} = \sqrt{\frac{2Z_c P_{izo}}{4\pi r^2}}, \text{ i pošto je za posmatranu antenu } E = \frac{Z_c}{2\pi r} \sqrt{\frac{2P}{R_z}} F(\theta, \varphi),$$

to se izjednačavanjem poslednja dva izraza dolazi do odnosa snaga zračenja tj. do pojačanja antene (*gain*),

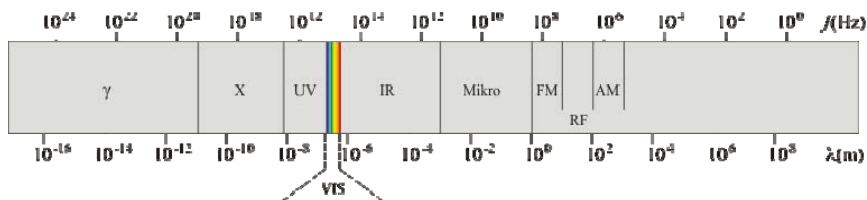
$$G(\theta, \varphi) = \frac{Z_c}{\pi R_z} F^2(\theta, \varphi).$$

Tako je za polutalasni dipol koji se nalazi u vakuumu (vazduhu)

$$Z_c = 120\pi \Omega, R_z = 73.14 \Omega, F(\pi/2, 0) = 1, G_{\max} = 1.64, g_{\max} = 2.15 \text{ dB}.$$

U praksi se često polutalasni dipol uzima za referentnu antenu umesto izotropne antene. Tako dobijene vrednosti treba podeliti sa 1.64.

54 - Elektromagnetni spektar



55 - Čovek u EMP

Danas živimo u elektromagnetnom smogu (Eng. *smog* - magla) tj. elektromagnetno zagađenoj sredini. Mnogi od efekata elektromagnetnog polja na živo tkivo, posebno na ćelijskom nivou, nisu dovoljno proučeni, a mnogi verovatno nisu još otkriveni. Pouzdano je poznato da ti efekti zavise od vremena izloženosti i frekvencije.

Zdravstveni rizik od EMP			
Efekti na kožu		Efekti na oči	
akutni	hronični	akutni	hronični
Crvenilo	Starenje	Zapaljenje rožnjače	Katarakta
Lat. <i>Erythema cutis</i>	Lat. <i>Degeneratio cutis</i>	Lat. <i>Keratitis acuta</i>	Lat. <i>Cataracta oculi</i>
Opekotine	Rak	Oštećenja mrežnjače	Degeneracija mrežnjače
Lat. <i>Combustio cutis</i>	Lat. <i>Carcinoma cutis</i>	Lat. <i>Laesio retinae</i>	Lat. <i>Degeneratio retinae</i>

Nezvanična podela na niske i visoke frekvencije je nastala iz istorijskih razloga, tj. pronalaskom naizmenične struje, X-zračenja, radio prenosa, mikrotalasa, lasera ...

56 - Čovek u NF EMP

Niske frekvencije (NF) zauzimaju veoma širok opseg elektromagnetnog spektra. Međutim, najčešće se govori o industrijskoj frekvenciji 50Hz ili 60Hz, gde je talasna dužina u vazduhu reda $\lambda \approx 6000\text{ km}$. Dakle, čovek se uvek nalazi u zoni indukcije i nikada u zoni zračenja izvora ovih frekvencija. Međutim, zbog poznatih posledica na ljudski organizam koje prouzrokuje direktni kontakt sa telima na višem električnom potencijalu, normiranje rizika je svedeno na gustinu struje koja protekne kroz telo.

Faktor oštećenja	Gustina struje $J \text{ [mA/m}^2\text{]}$	Opis
<i>a</i>	1-10	Neznatan odgovor biološkog tkiva.
<i>b</i>	10-100	Lakši poremećaji vida i nervnog sistema.
<i>c</i>	100-1000	Nadražaji tkiva koji dovode do nevoljnih pokreta. Poremećaj srčanog ritma i centralnog nervnog sistema.
<i>d</i>	>1000	Termička oštećenja tkiva. Jako ubrzan rad srca. Poremećaji i otkaz autonomnog nervnog sistema. Uslovi koji dovode do smrti.

Za elektromagnetno polje čovek je poluprovodna, nehomogena i disperzivna sredina opisana sa ϵ , μ i σ . Gustine indukovanih struja pri niskim frekvencijama je moguće, pri znatnim zanemarivanjima, ali sa dovoljnom tačnošću za industrijske frekvencije, izračunati samo pomoću *Ohmovog* zakona u lokalnom obliku, $J = \sigma E$. Na osnovu faktora oštećenja izračunavaju se granične vrednosti jačine električnog polja u pojedinim delovima organizma. Granična jačina spoljašnjeg električnog polja, E_0 , se dobija približno pomoću formule $E_0 = \epsilon_r E$. Ova aproksimacija je sasvim moguća jer je u svim slučajevima $\epsilon_r \gg 1$, pa je zakon prelamanja linija polja isti kao u elektrostatici. U praksi se na osnovu izračunate ili izmerene vrednosti E_0 određuje faktor oštećenja. Za faktor oštećenja *a* se dobija:

Naziv tkiva	$\sigma \text{ [S/m]}$	$\epsilon_r \cdot 10^7$	$E_a \text{ [V/m]}$	$E_0 \text{ [kV/m]}$
Mozak (siva masa)	0.075	1.211	0.013	157
Organi za varenje	0.521	1.637	0.002	328
Jetra	0.037	0.183	0.027	486
Masno tkivo	0.020	1.473	0.500	7530

Štetna delovanja elektromagnetnog polja industrijskih učestanosti na živo tkivo još uvek su nedovoljno poznata jer su efekti mali i kumulativni.

57 - RF zračenje

Radio frekventno zračenje (RF) zauzima veoma širok opseg elektromagnetnog spektra, od dugih (kilometarskih) talasa do mikro (mikrometarskih) talasa, tj. praktično do infracrvenog dela spektra. Ljudi su iskoristili sve opsege ovog dela spektra načinivši veštačke izvore ovog zračenja i u takvom okruženju žive.

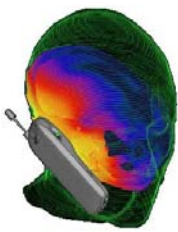
$$\delta = \frac{1}{\omega} \cdot \left(\frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right) \right)^{-1/2}$$

Elektromagnetne osobine živog tkiva, i posledično, dubina prodiranja zavise od frekvencije.

Na primer, na frekvenciji $f = 0.9 \text{ GHz}$ je

Naziv tkiva	$\sigma \text{ [S/m]}$	ε_r	$\lambda \text{ [m]}$	$\delta \text{ [m]}$
Mozak (siva masa)	0.942	52.725	0.045	0.041
Organi za varenje	1.187	65.062	0.041	0.037
Jetra	0.855	46.833	0.048	0.043
Masno tkivo	0.051	5.462	0.142	0.244

Neke učestanosti iz spektra RF zračenja su korišćene u terapijske svrhe. Međutim, do pojave sistema mobilne telefonije (GSM - *Global System for Mobile communications*) vrlo malo su proučavani efekti RF zračenja na ljudski organizam. Danas je definitivno poznato da efekti RF zračenja na ljude bitno zavise od frekvencije, ne samo zbog dubine prodiranja u tkivo, već i zbog netermičkih efekata kao što su neurološki ili efekti interakcije sa određenim lekovima. Istraživanja su pokazala da za čoveka postoje rezonantne frekvencije. Najveća apsorbovana snaga je na frekvenciji oko 70 MHz za stojeći stav i 100 MHz za sedeći stav.

		
U našoj zemlji nisu propisani znaci upozorenja.	Raspodela apsorbovane energije u glavi	Zaštitno odelo od RF zračenja

58 - RF zračenje - SAR i biološki efekti

Dubina prodiranja elektromagnetnog talasa u živo tkivo nije veličina koja je sama po sebi dovoljna za istraživanje bioloških efekata čiji su uzrok prodrli elektromagnetna polja, jer je raspodela energije u tkivu veoma složena. Različite lokalne raspodele elektromagnetne energije u živom tkivu dovode do termičkih ali i vrlo različitih netermičkih efekata koji još uvek nisu u potpunosti istraženi. Zbog toga se najčešće i govori samo o termičkim efektima.

Polazeći od doza koje su definisane kod jonizujućeg zračenja stručnjaci su želeli da uvedu veličinu koja je ekvivalent apsorbovanoj dozi jonizujućeg zračenja a predstavlja apsorbovanu dozu nejonizujućeg zračenja.

Makroskopska veličina kojom se opisuje apsorbovana energija u tkivu je *SAR* (Eng. *Specific Absorption Rate*) - specifična količina apsorbovane energije ili specifična apsorcija

Specific - jer je po jedinici mase.

Absorption - jer je upijena u tkivo.

Rate - jer je to brzina promene.

$$SAR = \frac{P}{m} = \frac{\text{Apsorbovana snaga EM talasa}}{\text{masa tela}} \left[\frac{\text{W}}{\text{kg}} \right],$$

ili

$$SAR = \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{dm} \right) \left[\frac{\text{W}}{\text{kg}} \right],$$

ili

$$SAR = \frac{P}{m} = \frac{1}{m} \frac{dW}{dt} = \frac{1}{m} \frac{m c_p dT}{dt} = c_p \frac{dT}{dt},$$

gde je $W[\text{J}]$ količina energije EM talasa koja se usled *Jouleovih* gubitaka u tkivu pretvori u toplotu, a $c_p[\text{W/kg K}]$ je specifični toplotni koeficijent.

Količina toplote koja je oslobođena u ozračenom tkivu je prema *Jouleovom* zakonu srazmerna kvadratu intenziteta električnog polja u tkivu

$$\frac{dP_j}{dV} = JE = \sigma E^2, \quad \text{pa je} \quad SAR = \frac{P}{m} = \frac{\sigma E^2 V}{\rho V} = \frac{\sigma E^2}{\rho},$$

gde je ρ masena gustina, a E jačina električnog polja u posmatranom delu zapremine (tkivu).

SAR je frekventno zavisna veličina, pa ovaj koncept ima smisla samo kod dubina prodiranja elektromagnetne energije u tkivo koje su dovoljne da se odredi zapremina i posledično masena gustina tkiva. To znači da je granica primenljivosti približno do frekvencije reda 10GHz kad je dubina prodiranja, zavisno od tkiva, najmanje 1cm.

SAR se može odrediti na četiri načina:

- Merenje jačine električnog polja u tkivu implementiranjem mikroantene.
- Merenje temperature tkiva implementiranjem minijaturnih termometara.
- Numeričko modelovanje, na primer pomoću FDTD (*Finite Difference Time Domain*) kojim se simulira prostorna raspodela električnog polja u tkivu.
- Formiranje fizičkih modela (fantoma) čovekove glave ili celog tela od materijala sličnih elektromagnetnih osobina. Nakon toga mogu se izvršiti merenja jačine električnog polja ili temperature.

Da li je pravi put odgonetanja biološkog delovanja elektromagnetnog polja u vezi sa energijom koju aporbuje tkivo, a koja biva pretvorena u toplotu?

Činjenica je da u ćeliji postoje slaba električna polja koja kontolišu fiziološke funkcije ćelije, kao što su zagrevanje, regeneracija i proliferacija. Spoljno i unutrašnje električno polje međusobno deluju i to ne mora uvek dovesti do porasta temperature.

Vrednosti za *SAR* se razlikuju za različita tkiva i različite frekvencije elektromagnetnog polja. Takođe, elektromagnetne osobine tkiva se menjaju u zavisnosti od bioloških uslova, tako da je teško odrediti *SAR* za pojedina tkiva. Takođe nije jednostavno simulirati biološki organizam numeričkim modelom predstavljajući ga pomoću elementarnih volumena za koje se smatra da imaju konstantne karakteristike.

Zato je prvo neophodno odrediti karakteristike spoljašnjeg polja koje je moguće izmeriti. Zatim je moguće proceniti ili izračunati apsorbovanu energiju, tj. indukovanu gustinu struje u tkivu.

Efekti RF zračenja su kumulativni. Postojeći rezultati o brzini reakcije nervnog sistema pokazuju da efekti zračenja na nervni sistem nisu *zaboravljeni*. Međutim, nije utvrđeno kada dolazi do nepopravljivih efekata. Ovo se posebno odnosi na upotrebu mobilne telefonije pošto je to ponavljajuće kratkotrajno izlaganje u dugom vremenskom periodu.

Ponavljana ekspozicija elektromagnetnom polju koje emituju mobilni telefoni dovodi do prolongiranih efekata na fiziološke procese u moždanom tkivu i poremećaja kognitivnih (prepoznavanje) funkcija.

ICNIRP osnovna ograničenja za izloženost EM poljima u frekvenzijskom opsegu od 10 MHz do 10 GHz

<i>SAR</i>	stanovništvo	profesionalci
usrednjen za celo telo	0.08 W/kg	0.4 W/kg
usrednjen za tkivo glave ili trupa mase 10 g	2 W/kg	10 W/kg
usrednjen za tkivo ekstremiteta mase 10 g	4 W/kg	20 W/kg

Za profesionalnu izloženost u području u kome postoji opasnost radiofrekventnog udara ili opekotina primenjuju se zahtevi (a), a u kome ne postoje ove opasnosti zahtevi (b). Kvadrati srednjih vrednosti jačine električnog polja, E , i magnetnog polja, H , izračunatih u bilo kom periodu od šesdeset sekundi, ne smeju preći date granice, osim za ograničeno vreme izlaganja. Frekvencija f je u MHz, a S predstavlja gustinu snage ravanskog talasa. Pri izlaganju opšte populacije kvadrati srednjih vrednosti električnih i magnetnih polja ne smeju preći 1/5 nivoa u kojima postoji mogućnost radiofrekventnog udara ili opekotina.

Maksimalni nivoi izlaganja zračenih ljudi za 8h, zahtev (a)

f [MHz]	E^2 [V ² /m ²]	H^2 [A ² /m ²]	S [W/m ²]	S [mW/cm ²]
0.3–9.5	$3.77 \cdot 10^4$	0.265	100	10
9.5–30	$3.39 \cdot 10^6 / f^2$	$29.9 / f^2$	$9000 / f^2$	$900 / f^2$
30–30000	$3.77 \cdot 10^3$	$2.65 \cdot 10^{-2}$	10	1

Maksimalni nivoi izlaganja zračenih ljudi za 8h, zahtev (b)

f [MHz]	E^2 [V ² /m ²]	H^2 [A ² /m ²]	S [W/m ²]	S [mW/cm ²]
0.3–9.5	$3.77 \cdot 10^5$	2.65	1000	100
9.5–30	$3.39 \cdot 10^6 / f^2$	$23.9 / f^2$	$9000 / f^2$	$900 / f^2$
30–30000	$3.77 \cdot 10^3$	$2.65 \cdot 10^{-2}$	10	1

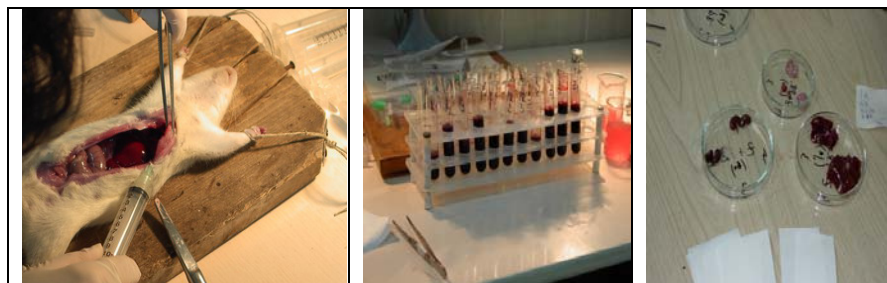
59 - RF zračenje - eksperimenti *in vivo* ©

Podrazumeva se da postoje kontrolna i eksperimentalna grupa životinja i da su sve uzgajane u laboratorijskim uslovima i žrtvovane pod anestezijom.

- Za potrebe eksperimenta mobilni telefon je prepravljen tako da ima neprekidno spoljašnje napajanje. Pomoću merno - regulacionog sklopa, koji je zasnovan na personalnom računaru sa posebno izrađenim programom, mobilni telefon se dovodi u stanje emisije što odgovara radu tokom razgovora. Trajanje "razgovora" se programski podešava. Prosečno rastojanje eksperimentalnih miševa od antene je 10 cm.

- Kod miševa iz eksperimentalne grupe izložene delovanju EMP primećena je dezorijentacija, agresivnije ponašanje, neuobičajena uznemirenost i panične reakcije. Uočeni efekti su prolazne prirode. Uklanjanjem izvora EMP polja promene su nestale u toku dve do tri nedelje.

- Miševi izloženi RF zračenju imaju manji prirast u telesnoj masi, poremećaje u kratkotrajnom i dugotrajnom sećanju i nemaju potomstvo. Ovo su nereverzibilne promene.

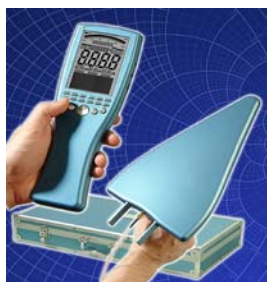


Rezultati patohistoloških i biohemijskih analiza izlaze iz okvira ovog teksta. Međutim, treba primetiti da uočene promene u nervnim ćelijama mogu biti uzrok neurodegenerativnih oboljenja kao što je *Parkinsonova* bolest.

60 - RF zračenje - merenje i normiranje

Kod preventivnih i periodičnih ispitivanja uslova radne i životne okoline u odnosu na RF zračenja merenja bi trebalo podeliti na tri slučaja.

Brzi opšti pregled	Detektovanje postojanja elektromagnetnog zračenja veštačkih izvora. Koristiti se u zoni zračenja.
Skeniranje frekventnih opsega	Detekcija svih frekvencija. Analiza nivoa izloženosti. Koristiti se u zoni zračenja i prelaznoj zoni.
Detaljna merenja, analize, normiranja i procene rizika	Merenje jačina komponenti elektromagnetnog polja u svakom od frekventnih opsega. Detaljni proračun je zasnovan na superpoziciji po frekvencijama, pravcima merenja i izvorima. U zoni indukcije mere se obe komponente polja.



© Fakultet zaštite na radu u Nišu

- Izmerena vrednost koja je manja od osetljivosti instrumenta za datu frekvenciju mora biti zanemarena.

- Izabrati merno mesto.
- Izabrati frekvenciju (ili uzan opseg)
- Izmeriti E u tri pravca i izračunati

$E_f = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$. U prelaznoj i dalekoj zoni je $H_f \approx 377 E_f$. U bliskoj zoni je neophodno meriti i H_f u sva tri pravca.

- Izračunati $E = \sqrt{\sum E_f^2}$ i H .
- Princip linearne superpozicije primeniti na sve izvore zračenja

ICNIRP referentni nivoi za stanovništvo i profesionalnu izloženost.

f [MHz]	E [V/m]	H [A/m]	Γ [W/m ²]
10-400	28	0.073	2
	61	0.160	10
400-2000	$1.375\sqrt{f}$	$0.0037\sqrt{f}$	$f/200$
	$3.000\sqrt{f}$	$0.0080\sqrt{f}$	$f/40$
2000-300000	61	0.160	10
	137	0.360	50

U Srbiji postoji standard JUS N.No.206 još iz 1990. godine.

61 - IR zračenje

Infracrveno (Eng. *Infra Red*) zračenje ili toplotno zračenje je deo elektromagnetnog spektra koji se nalazi između mikrotalasa i vidljive svetlosti, i približno zauzima frekventni opseg 0.3 THz - 0.3 PHz.

- Granice spektra - Oštre granice IR dela spektra ne postoje. Tako u blizini usijanih tela, na gornjoj granici ovog dela spektra, kod čoveka postoji osećaj toplote i osećaj crvene svetlosti. Na donjoj granici ovog dela spektra postoji samo osećaj toplote jer čovek nema razvijeno čulo za opažanje nižih frekvencija. Zbog toga se i proučavanje uticaja mikrotalasnih zračenja na čoveka u proteklim decenijama uglavnom svodilo na termičke efekte. Životinje nemaju kolorni vid ali zato mnoge, posebno noćne grabljivice, imaju termičko viđenje, naime u crno-belom varijanti raspoznaju gradijent temperature.

- Izvori IR zračenja - Sva tela emituju spektar IR zračenja čija širina zavisi od temperature tela i emisije sposobnosti tog tela. Kako su sva tela na našoj planeti zagrejana do neke temperature to su i sva tela u našem okruženju prirodni izvori IR zračenja. Nekim telima čovek veštački menja oblik i povećava ili smanjuje temperaturu (visoke peći, električni grejači, radijatori, saune, klima uređaji, sijalice) i time menja emisije sposobnosti tela i talasnu dužinu zračenja, ali su to i dalje prirodni izvori zračenja. Samo u slučaju laserske svetlosti, često nazivane hladna svetlost, postoji veštački izvor IR zračenja.

- Podela IR zračenja - Frekventni opseg IR zračenja je podeljen na tri dela u zavisnosti od dubine prodiranja u kožu i koeficijenta apsorpcije vode, jer je koža redovno, u većoj ili manjoj meri, vlažna zbog znojenja. Znojenje je odbrambeni mehanizam od IR zračenja. Za talasnu dužinu od $\lambda = 3.00 \mu\text{m}$ voda ima apsorpcioni maksimum, uz to elektromagnetni talasi manjih talasnih dužina, koji spadaju u opseg vidljivog zračenja, ne prodiru čak ni kroz mrtvi ili perutajući sloj kože.

- Fotobiološki efekti IR zračenja nisu toliko značajni da bi bila potrebna posebna merenja u cilju primene preporuka za dužinu izlaganja ovom zračenju.

Oznaka opsega	Talasna dužina λ	dubina prodiranja
IR-A	$0.78 \mu\text{m} - 1.40 \mu\text{m}$	$\delta > 1 \text{mm}$
IR-B	$1.40 \mu\text{m} - 3.00 \mu\text{m}$	$\delta < 1 \text{mm}$
IR-C	$3.00 \mu\text{m} - 1000 \mu\text{m}$	$\delta \approx 1 \mu\text{m}$

62 - IR zračenje - biološki efekti

- Upotreba IR zračenja u medicinske, posebno terapijske, svrhe je dugo poznata. Više hiljada godina su poznate saune i tople kade. IR zračenje je u širokoj upotrebi u fizikalnoj medicini za tretiranje sportskih povreda, upale mišića, bolova u leđima i nekih hroničnih bolesti. Poslednjih godina IR-A izvori, zbor najveće dubine prodiranja, se koriste za hipertermički tretman nekih oblika kancera. Zato se IR zračenje propušta kroz vodeni filter da bi se dobio čisti IR-A spektar. Takođe, konvencionalne saune se zamenjuju IR-C saunama u kojima nema vodene pare ili se čak saune prave kombinovano po želji korisnika.

- Čovek je evolucijom razvio mehanizam odbrane od IR zračenja koji se sastoji u jednostavnom udaljavanju od izvora zračenja. Zdrav ljudski organizam reaguje za 0.25s do 10s zavisno od talasne dužine i temperature, što je sasvim dovoljno vreme da se zaštite oči i koža. Međutim, reakcija organizma potiče od čula vida i ne postoje sigurni dokazi da termički receptori u koži reaguju u istim granicama. Danas se čovek odeva i nosi naočare za sunce, koristi termoizolacione materijale, i živi u klimatizovanim prostorijama, jer je evolutivno naučio da se štiti od toplote i hladnoće.

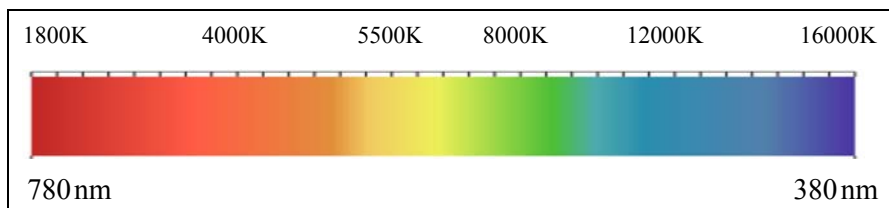
- Efekti na kožu - Ovde se ne radi o kontaktu sa zagrejanim telima. U uslovima prirodnog okruženja (pritisak, vlažnost) najniža temperatura koja dovodi do termičkog zapaljenja kože je 318K (45°C) . Do opekotina dolazi na višim temperaturama u zavisnosti od vremena ekspozicije. Na primer, temperatura od 320K (47°C) u trajanju od 10s ima isti efekat kao i temperatura od 330K (57°C) u trajanju od 1ms. Osećaj toplote najviše zavisi od površine kože koja je izložena zračenju. Veće površine brže se zagrevaju i sporije se hlade zbog prenosa toplote pomoću krvi. Suprotno, tačkasto zagrevanje, na primer pomoću laserskog zraka, ne proizvodi nikakav osećaj, a zagrejano mesto se trenutno hladi odavanjem toplote u spoljašnu okolinu. Postoji samo jedan poznati efekat na kožu koji se javlja sa zakašnjenjem i to je trajno crvenilo kože (Lat. *Erythema ab igne* - crvenilo od vatre), mada je boja kože samo inicijalno crvena, a kasnije je braon. Ovaj efekat se javlja u slučajevima kad se koža hronično i periodično izlaže IR zračenju (livnice metala, fabrike stakla) ali temperature nisu dovoljne da izazovu opekotine.

- Efekti na oči - Najveći deo energije IR zračenja apsorbuju spoljašnji delovi oka (Lat. *Cornea* - rožnjača). Samo u ekstremnim slučajevima kao što je izloženost oka ksenonskoj lampi ili atomskoj eksploziji deo energije IR-A zračenja može da dospe do unutrašnjosti oka (Lat. *Retina* - mrežnjača). Na osnovu malobrojnih eksperimenata je doneta preporuka - za temperaturu okruženja koja je veća od 308K gustina snage na očnu površinu mora biti manja od 100 W/m² .

63 - VIS ili optičko zračenje

Vidljivo (VIS - *VISible*) ili optičko zračenje je deo elektromagnetnog spektra i prema preporuci Međunarodne komisije za osvetljenje (*International Commission of Illumination* - CIE) zauzima opseg 380 – 780 nm.

Svakoj boji u vidljivom delu spektra pridružena je odgovarajuća temperatura, od crvene (tople boje) do ljubičaste (hladne boje). Podela boja na tople i hladne postoji u svakodnevnom životu, umetnosti (posebno slikarstvu i arhitekturi) ali i u fizici.



Međutim, temperatura toplih boja je manja od temperature hladnih boja.

Nije tačno utvrđeno kako se kod ljudi razvio kolorni vid (zbog hrane, parenja ili vatre) ali je sigurno da zagrejana (topla) tela zrače crveno, a daleko nebo je (hladno) svetlo plavo.

Čovek je upotrebio i talasne dužine koje nisu u vidljivom delu spektra.

Boja	λ [nm]
ljubičasta	380 – 436
plava	436 – 495
zelená	495 – 566
žuta	566 – 589
narandžasta	589 – 627
crvena	627 – 780

Na samoj granici vidljivosti je Ultra ljubičasta svetlost (Eng. *Black Light*) koja se često naziva Crno Svetlo

Prirodni izvori elektromagnetnog zračenja talasnih dužina koje su iznad granice vidljivog zračenja su veoma udaljeni i ne proizvode osećaj toplote. Najbliži prirodni izvor zračenja celokupnog elektromagnetnog spektra je Sunce, a slede udaljene zvezde i cele galaksije. Plavetnilo neba ili vodenih površina je posledica višestrukih prelamanja i odbijanja elektromagnetnih talasa.

U prostoru gde Zemljini omotači nisu od uticaja, Sunce je kao izvor zračenja vrlo približno jednako teorijskom modelu - *Crno Telo*. Na osnovu zakona toplotnog zračenja dolazi se temperatura za svaku od talasnih dužina.

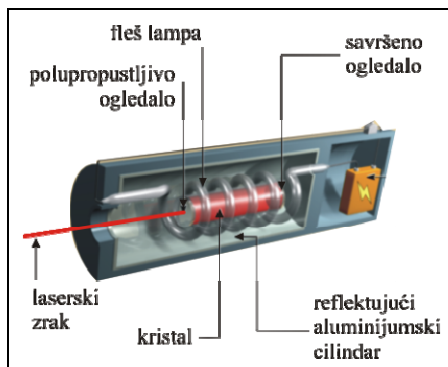
Nikave mere zaštite nisu potrebne u vidljivom delu elektromagnetnog spektra. Zaštita od prejakog intenziteta zračenja je refleksno žmurenje.

64 - Prirodna i LASERska svetlost

Ako ruku samo jednom pomerimo napred-nazad u nekom sudu sa vodom i napravimo talas, taj talas će posle izvesnog vremena nestati i površina vode će ponovo postati ravna, što je spontano jer svi sistemi teže minimumu energije. Međutim, ako ruku nastavimo da pomeramo u istom ritmu sa kojim voda talasa, talasi će biti sve veći i u jednom trenutku će voda početi da preliiva ivice posude, što je stimulisano spoljašnjim izvorom energije. Ako je još takav sud samo sa jedne strane otvoren i curenje vode će biti usmereno.

Visokonaponski generator koji radi u prekidačkom režimu naizmenično uključuje i isključuje fleš lampu obmotanu oko kristala (na primer rubin).

Svaki put kad lampas zasvetli kristal prima energiju. Kad atom kristala apsorbira energiju u vidu fotona jedan od elektrona prelazi na viši energetski nivo - višu orbitu.



Za takav atom se kaže da je ekscitiran (Lat. *excitare* - pobuđivati). To stanje je nestabilno i elektron može da ostane na višoj orbiti svega nekoliko milisekundi. Vraćajući se na prvobitnu orbitu, u stabilno stanje minimalne energije, otpušta kvant energije (foton) koji je apsorbirao. To je spontana emisija.

Ako fleš lampas radi u istom ritmu (frekvenciji) desiće se da emitovani foton iz fleš lampe pobudi već pobuđeni atom. Tada će takav atom emitovati dva fotona koji su iste frekvencije. To je stimulisana emisija. U kristalu dolazi do pojačanja svetlosti i to je zapravo značenje skraćenice LASER (Eng. *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*).

Sa jedne strane kristala nalazi se savršeno ogledalo koje sve emitovane fotone vraća nazad u kristal pojačavajući već postignuti efekat. Sa druge strane kristala se nalazi polupropustljivo ogledalo koje deo fotona vraća nazad ali jedan deo fotona propušta. Fotoni koji su napustili kristal formiraju koherentni monohromatski elektromagnetni talas sa velikom površinskom gustinom energije kod koga svi fotoni osciluju sa istom fazom. To je bitna razlika u odnosu na prirodnu svetlost koje je polihromatska i nekoherentna.

Laseri mogu biti gasni, kristalni i poluprovodnički. Od upotrebljenog materijala zavisi frekvencija, tj. boja svetlosti u vidljivom delu spektra.

65 - LASERsko zračenje - klase sigurnosti

Klasa sigurnosti	Opis
1	Zračenje nije opasno. Laserske diode i drugi izvori male snage koja je oko 0.2 mW.
1M	Zračenje nije rizično sve dok se ne upotrebi optička oprema koja može da fokusira svetlosni snop.
2	Zračenje u vidljivom delu spektra (400–700nm) i nije opasno po oči u kratotrajnom dejstvu do 0.25s koliko je potrebno za refleksno žmurenje.
2M	Isto kao i za klasu 2, sa dodatnim ograničenjima da se optička oprema za fokusiranje ne može upotrebljavati. Uz ograničenja snaga može biti već od 1 mW.
3R	Primena može biti opasna za oči, ali se vremenski ograničava na 5 kratkotrajnih ekspozicija lasera iz klase 1 ili iz klase 2 za frekvencije iz drugih delova EM spektra.
3B	Primena može biti opasna za oči i kožu. Reflektovani EM talasi su jednako opasni. U vidljivom delu EM spektra snaga se ograničava do 500 mW.
4	Primena je veoma opasna za oči i kožu. Čak i svetlost reflektovana sa difuznih površina je opasna po oči. Laseri snage od 10 W – 4 kW mogu izazvati požare i eksplozije.

66 - LASERsko zračenje - mere sigurnosti

- Obavezna upotreba zaštitnih naočara sa maksimalnom apsorpcijom u delu elektromagnetnog spektra koji pokriva frekvenciju lasera.
- Potpuno oklapanje lasera apsorpcionim materijalom.
- Automatsko isključivanje lasera u slučaju da je zaštitni oklop otvoren
- Zaključavanje komandne table
- Automatsko zaključavanje ulaznih vrata uključivanjem lasera i uključivanje svetlosnih upozorenja.
- Vidljiva upozorenja sa obe strane ulaznih vrata sa naznakom klase i snage lasera.
- Obavezna ugradnja stopera glavnog laserskog zraka i mogućih parazitnih reflektovanih.
- Obavezna ugradnja pomoćnog vidljivog laserskog zraka minimalne snage ako laser emituje zrak iz nevidljivog dela spektra.
- Pristup i rukovanje je dozvoljeno samo autorizovanim (edukovanim) osobama.



67 - UV zračenje

Ultraljubičasto (Eng: *Ultra Violet*) zračenje spada u deo elektromagnetnog spektra koji se nalazi između vidljive svetlosti i X-zračenja i zauzima uzan frekventni opseg 7.5PHz-30PHz , ili talasne dužine 400nm -100 nm .

- Izvori UV zračenja – Najveći i jedini prirodni izvor UV zračenja koje dospeva na Zemlju je Sunce. Veštački izvori ovog zračenja su električni luk, specijalne lampe za dezinfekciju i delimično kvantni generatori (laseri) i usijana tela.

- Podela UV zračenja – Iako veoma uzan frekventni opseg UV zračenja je podeljen na tri dela, a na osnovu bioloških efekata.

UV-A	400 nm - 315 nm	Takođe, činjenica je da prolazeći kroz atmosferu skoro sva energija UV-C i oko 90% energije UV-B biva apsorbovana.
UV-B	315 nm-280 nm	
UV-C	280 nm-100 nm	

Zato je energija UV zračenja koje dospeva na površinu zemlje sastavljena uglavnom od UV-A i male komponente UV-B.

- Faktori koji utiču na primljenu energiju UV zračenja - Prirodni faktori koji utiču na elektromagnetnu energiju dospelu na površinu Zemlje od najvećeg izvora Sunca, pored dole navedenih, su i koncentracije molekula kiseonika i ugljendioksida u atmosferi.

Položaj Sunca	Upadni ugao elektromagnetnih talasa je najmanji kada je Sunce najviše na nebu. Najveći dnevni deo elektromagnetne energije, oko 60%, dospeva na površinu zemlje oko solarnog podneva, tj. između 10 i 14 sati, zavisno od vremenske zone.
Geografska širina	U ekvatorijalnom pojasu dospela elektromagnetna energija je najveća i opada prema geografskim polovima.
Nadmorska visina	Veća nadmorska visina znači redu atmosferu. Za svakih 300m dospela energija na površinu zemlje se povećava za 4%.
Ozonski omotač	Najveći apsorber UV zračenja menja se tokom godine, čak i u toku dana. Zato se prave posebne mape. Ozonske <i>rupe</i> su danas česta pojava.
Oblačnost	Primljena energija je najveća pri vedrom nebu. Međutim, čak i pri značajnoj oblačnosti, zbog višestrukih refleksija i rasipanja, ukupna primljena energija može da bude velika. Čak 90% energije UV-A prodire kroz oblake.

68 - UV zračenje - zablude i istine

Na samoj površini zemlje na ukupnu elektromagnetnu energiju koja dospeva do ljudi utiču pre svega refleksija elektromagnetnih talasa, a posebno i ponašanje ljudi koji su ovom zračenju izloženi.

Refleksija	UV zračenje zbog malih talasnih dužina podleže svim zakonima geometrijske optike. Onaj deo EMT koji dospe do površine zemlje nailazi na prirodne reflektore. Snežni pokrivači reflektuju 80% elektromagnetne energije. Vodene površine reflektuju 25% elektromagnetne energije. Peščane površine reflektuju 15% elektromagnetne energije.
Senka	Senka smanjuje UV elektromagnetnu energiju za 50%.
Zatvoren prostor	U zatvoreni prostor dospe svega 10% ukupne UV elektromagnetne energije.

<i>Pogrešno</i>	<i>Tačno</i>
Pocrniti je zdravo.	Ne. Tamniji ten usled sunčanja je samoodbrambeni mehanizam kože od daljih oštećenja.
Tamniji ten štiti od UV zračenja.	Ne. Tamniji ten je samo delimična zaštita. Fototipski koža je svrstana u šest kategorija od potpuno svetle do crne.
Oblačno nebo štiti od UV zračenja.	Ne. Većina UV talasa prodire kroz oblake. Rasipanja kroz zamagljene prostore čak povećavaju ukupnu prispelu energiju.
U vodi smo zaštićeni od UV zračenja.	Voda daje samo minimalnu zaštitu. Šta više, refleksije povećavaju ukupnu energiju koja dospeva na izložene delove tela.
Zimi nema UV zračenja ili je zanemarljivo.	Ne. Zimi je položaj Sunca takav da je dospela energija manja nego leti. Refleksije zbog snežnog pokrivača udvostručuju energiju zračenja.
Pauze u sunčanju štite od UV zračenja.	Ne. UV zračenje je kumulativno.
Nema vrućine - nema UV zračenja.	Ne. Osećaj topline potiče iz infracrvenog dela spektra sunčevog zračenja.
Zaštitne kreme omogućavaju duže vreme izloženosti UV zračenju.	Ne. Zaštitne kreme štite od nevoljnog izlaganja sunčevom zračenju. Zaštitni faktor 4 je isto što i pocrnela koža.

Zbog jednostavnijeg obaveštavanja javnosti o štetnom delovanju UV zračenja još 1992. godine kanadski naučnici iz odseka za zaštitu životne sredine uveli su UV indeks, I_{UV} .

69 - UV indeks

UV indeks je bezdimenzionalna veličina koja je linearno povezana sa gustinom energije koja dospeva na površinu zemlje, ali ta veza nije jednostavna jer UV zračenje ima širinu opsega (spektar) u kome svaka od talasnih dužina dospeva na površinu zemlje sa različitom energijom. Energija elektromagnetnih talasa kraćih talasnih dužina je većim delom već apsorbovana u višim slojevima atmosfere, a baš te talasne dužine su najštetnije. Zbog toga se svakoj talasnoj dužini iz spektra dodeljuje određena težina, $s(\lambda)$, koja je nazvana relativna spektralna efektivnost. Težinsku krivu konstruisali su *McKinaly* i *Diffey* na osnovu oštećenja koje različite talasne dužine UV zračenja ostavljaju na koži (*Erythema action spectrum*) i ta kriva je normalizovana na talasnu dužinu od 270 nm, za koju je $s(\lambda) = 1$. Na osnovu eksperimentalne krive aproksimacijom su dobijeni izrazi za proračun ovog koeficijenta.

Relativna spektralna efektivnost $s(\lambda)$	Talasna dužina λ [nm]
$s(\lambda) = 0.959^{(270-\lambda)}$	$210 \leq \lambda \leq 270$
$s(\lambda) = 1 - 0.63 \left(\frac{\lambda - 270}{20} \right)^{1.64}$	$270 < \lambda \leq 300$
$s(\lambda) = 0.36(0.736)^{(\lambda-300)} + 10^{(2-0.0163\lambda)}$	$300 < \lambda \leq 400$

Za određivanje efektivne gustine energije se koristi težinska formula u kojoj se zbog upotrebe merne opreme koristi centralna talasna dužina, λ , i odgovarajuća širina opsega, $\Delta\lambda$.

Težinska formula	Tipične vrednosti za λ [nm] i $\Delta\lambda$ [nm]	
$E_{ef} = \sum E_{\lambda} s(\lambda) \Delta\lambda$	$\lambda \leq 300$	5
	$\lambda = 320$	10
	$\lambda = 330$	15
	$350 \leq \lambda \leq 400$	30

gde su E_{λ} [mW/m²nm] rezultati merenja ili proračuna za određenu centralnu talasnu dužinu, λ . Rezultat se deli konstantom čija vrednost zavisi od upotrebljenih jedinica, da bi se dobio UV indeks na skali od 0 (noć) do tipičnog maksimuma 10 (solarno podne) ali je skala zapravo sa gornje strane otvorena.

70 - UV indeks i mere zaštite

I_{UV}	Rizik	Boja	Preporuke za mere zaštite
0-2	Nizak	Zeleno	Naočare za sunce. U snežnim predelima zaštitne kreme.
3-5	Umeren	Žuto	+ Šešir i odeća. Provoditi veći deo vremena u senci.
6-7	Visok	Narandžasto	++ Šešir sa širokim obodom. Smanjti vreme pod suncem oko solarnog podneva.
8-10	Vrlo visok	Crveno	+++ Odeća sa dugim rukavima. Dugačke haljine i pantalone. Zaštitne kreme sa faktorom 15 i više.
11+	Ekstreman	Ljubičasto	++++ Ne izlagati se suncu dva sata pre i tri sata posle solarnog podneva. Držati se zatvorenog prostora.
Znak + podrazumeva sve prethodne mere zaštite.			

U Srbiji nisu propisane dozvoljene vrednosti za intenzitet UV zračenja i vremena izlaganja tom zračenju. Prema preporukama svetske zdravstvene organizacije (WHO) i prema standardima na koje se pozivaju, dozvoljena gustina energije UV zračenja mora biti manja od 30 J/m^2 .



U Srbiji nisu propisani znaci obaveštavanja i upozoravanja.

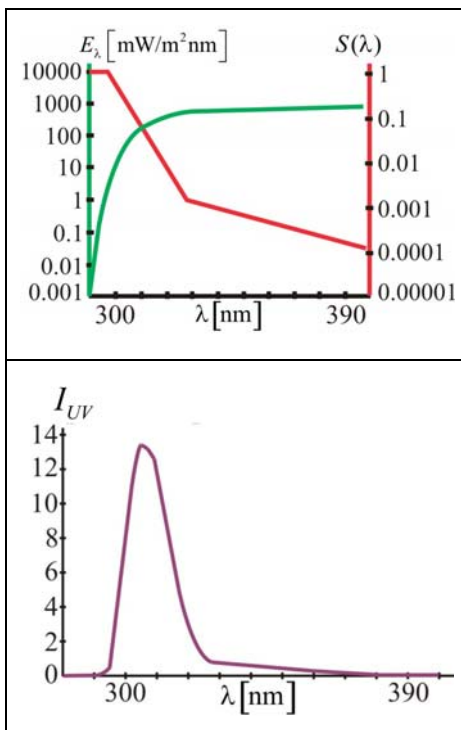
Kod nekoherentnog UV zračenja i kontinualnog izlaganja (Sunce, UV lampe) meri se jačina zračenja, tj. snaga zračenja po jedinici površine, ili gustina snage (Eng. *irradiance*) $E[\text{W/m}^2]$, a zbog jednostavnijeg obaveštavanja javnosti je uveden UV indeks. Kod koherentnog i impulsnog UV zračenja (električni luk, laseri) meri se gustina energije (Eng. *radiant exposure*) $H[\text{J/m}^2]$.

71 - UV zračenje - proračun UV indeksa

Standardna procedura za proračun UV indeksa koju preporučuju Svetska meteorološka organizacija (WMO-*World Meteorological Organisation*) i Svetska zdravstvena organizacija (WHO-*World Health Organisation*) sastoji se u sledećem :

- Merenje jačine solarnog UV zračenja $E[\text{mW/m}^2\text{nm}]$ za različite talasne dužine sve do 400 nm .
- Množenje izmerenih vrednosti težinskim faktorom $s(\lambda)$, za svaku talasnu dužinu posebno.
- Sabiranje dobijenih proizvoda, što je površina ograničena novonastalom krivom i apcisolom.
- Deljenje dobijenog zbira faktorom $k = 25 \text{ m}^2/\text{mW}$ da bi se dobio UV indeks,

$$I_{UV} = k \int_{180}^{400} E_{\lambda} s(\lambda) d\lambda .$$



Međutim, instrumenti koji se koriste za merenje jačine UV zračenja nikada nisu dovoljno selektivni da bi merenja bila dovoljno tačna za samo jednu talasnu dužinu. Zato se vrše merenja za nekoliko karakterističnih talasnih dužina uzimajući u obzir širinu mernog opsega. Tada se integral zamenjuje sumom i dobija se zadovoljavajući informativni rezultat za UV indeks.

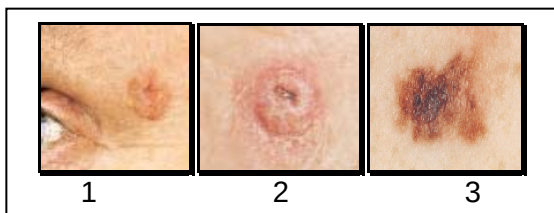
$$I_{UV} = k \sum E_{\lambda} s(\lambda) \Delta\lambda$$



72 - UV zračenje - biološki efekti

- Vitamin D - Vitamin D se fotohemijski proizvodi u perifernom sloju kože pod uticajem UV-B zračenja koje stimuliše proizvodnju melanina (Grk. *melánôma*-crnilo) što rezultira tamnijim tenom. Međutim, tako koža postaje filter, pa veća koncentracija melanina zahteva duže izlaganje zračenju za istu količinu proizvedenog vitamina D.

- Koža - Najpoznatiji akutni efekat UV zračenja je crvenilo kože kao posledica opekotina (Lat. *erythema* - crvenilo). i to je prvi odbrambeni mehanizam organizma. Ljudi tamnog i crnog tena evolutivno su se prilagodili UV zračenju ali nisu i zaštićeni. Manje očigledna posledica UV zračenja je zgusnuće perifernih slojeva kože što smanjuje dubinu prodiranja elektromagnetne energije u dublje slojeve i to je drugi odbrambeni mehanizam. Hronično izlaganje UV zračenju ubrzava starenje i postepeno gubljenje elastičnosti kože što rezultira suvom, naboranom i grubom kožom. Hronično izlaganje UV zračenju dovodi i do pojave



karcinoma. Nemelanomni karcinomi (1, 2) su retko smrtonosni i najučestaliji su na delovima tela koji su nezaštićeni i hronično izloženi UV zračenju, kao što su delovi glave ili pod-

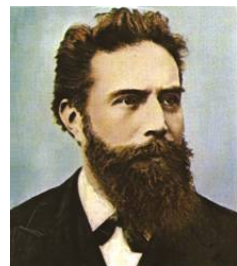
laktice. Maligni melanom (3) je znatno ređi ali smrtonosan. Pojava ove vrste karcinoma se povezuje sa genetskim karakteristikama (netipični mladeži)

- Oči - Prirodni odbrambeni mehanizmi kao što su skupljanje zenica ili refleksno žmurenje aktiviraju se u ekstremnim situacijama, kao što je iznenadni bljesak, i imaju samo delimično zaštitno dejstvo jer trenutno smanjuju dubinu prodiranja elektromagnetne energije u oči. Akutno izlaganje UV zračenju dovodi do efekata koji su slični onima koji bi se javili kao opekotine na hiper osetljivoj koži. Ovde su to privremeno slepilo i zapaljenje očnih kapaka. Posledice su bolne ali reverzibilne. U ekstremnim slučajevima dolazi do pojave snežnog slepila. Glavni faktor rizika za razvoj katarakte je hronično izlaganje UV-B zračenju.

- Imuni sistem - Postoji sve više dokaza da izlaganje UV zračenju smanjuje sposobnost organizma da ograniči razvoj već postojećeg karcinoma kože. Izlaganje UV zračenju povećava rizik od infekcija virusnog, bakterijskog, parazitskog i gljivičnog porekla, i umanjuje dejstvo vakcina. UV zračenje usporava imunološki sistem pa je još rizičnije za one koji već primaju lekove sa tim efektom.

73 - X zračenje – uvod u jonizujuće zračenje

Pred Božić 1895. godine, nemački fizičar *Röntgen* (*Wilhelm Konrad Röntgen*, 1845-1932) otkrio je do tada nepoznate zrake koji su prodirali kroz različite materijale uključujući ljudsko tkivo, što je pružilo mogućnost fotografskog zapisa, kako su zapravo, sasvim slučajno i otkriveni. Nazvao ih je X (nepoznati) zraci i taj naziv je ostao u fizici do danas, mada se često nazivaju Rentgenovi zraci.



Malo je poznato, čak i ekspertima, da je znato ranije od Rentgena i znatno ranije od objavljivanja radova iz kvantne fizike Tesla izvodio eksperimente sa strujama visokog napona i visokih frekvencija koje su služile za napajanje cevi sa razređenim gasovima tj. za proizvodnju X zraka. U tim eksperimentima je načinio snimke delova ljudskog tela i poslao ih Rentgenu. Rentgen je dobio prvu Nobelovu nagradu za fiziku.



Prvi snimak

U elektromagnetnom spektru X zraci zauzimaju talasne dužine od 10 do 0.01 nm, ili frekvencije u opesgu 30PHz - 30EHZ i spadaju u deo elektromagnetnog spektra pod nazivom jonizujuće zračenje.



Rentgenska cev

Jonizujuće zračenje su čestice (talasi) sa tako visokom energijom da mogu da odvoje bar jedan elektron iz atoma ili molekula.

Oštra granica između nejonizujućeg i jonizujućeg dela elektromagnetnog spektra ne postoji. RF zračenje i mikrotalasno zračenje su nejonizujuća zračenja. VIS, UV-A i UV-B zračenje mogu da jonizuju svega nekoliko molekula. UV-C zračenje može da jonizuje veliki broj atoma i molekula ali iz prirodnih izvora skoro da ne dospeva na površinu zemlje. X zračenje jonizuje skoro sve atome i molekule. Smatra se da energija fotona koja je manja od 12eV nedovoljna da izazove jonizaciju materije. Ovo odgovara frekvenciji talasa $f = 2,9\text{PHz}$ odnosno $\lambda \approx 103\text{nm}$.

Elektromagnetni talasi nezavisno od frekvencije odnosno talasne dužine imaju iste osobine u smislu prostiranja, divergencije, interferencije, polarizacije i td, jedino se razlikuju po energiji koju sa sobom nose.

Jonizujuće zračenje se proučava pomoću postulata kvantne fizike i nije predmet razmatranja u ovoj knjizi.

LITERATURA

- Abramovitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions-with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publication. New York. 1972.
- Brillouin, L., *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, 1960.
- Jones, D. S., *The Theory of Electromagnetism*, Pergamon Press, New York, 1964.
- Krstić, D. D., Petković, D. M., Stanković, V. B., *Proračun elektromagnetnih polja industrijskih učestanosti prodrlih u ljudsko telo - Prilog izradi nacionalnog standarda iz oblasti EMC*, Electra IV, Tara 2006, pp.324-329.
- Mušicki, Đ., *Uvod u Teorijsku Fiziku II*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1963.
- Petković, D. M., *Novi metod za projektovanje lineičnih antena sa zakrivljenim provodnicima - doktorska disertacija*, Elektronski fakultet, Niš,
- Petković, D. M., *Elektrostatičko polje u radnoj i životnoj sredini-prvi deo*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2005.
- Petković, D. M., Krstić, D. D., *Elektrostatika*, Fakultet zaštite na radu, Niš, 2005.
- Petković, D. M., Krstić, D. D., Stanković, V. B., *The Effect of Electric Field on humans in the Immediate Vicinity of 110kV Power Lines*, Facta Universitatis, Ser. Working and Living Environmental protection, Vol.3, No 1, 2006, pp.63-72.
- Petković, D. M., Zigar, D., Jovanović, D., *Results of the simulation of the flame thermal radiation propagation through room openings*, Facta Universitatis, Ser. Working and Living Environmental protection, Vol.4, No 1, 2007, pp.11-18.
- Popović, D., *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd. 1980.
- Surutka, J., *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd. 1975.
- Veličković, J. D., *Elektromagnetna zračenja-I, električna zračenja*, izdavač Autor, Niš, 1997.
- Veličković, M. D., *Elektromagnetika*, Elektronski fakultet, Niš, 1994.
- Veličković, M. D. i saradnici, *Zbirka rešenih zadataka iz elektromagnetike, prvi deo*, Elektronski fakultet, Niš, 2000.
- Radić, S., Petković, D. M., Marković, V., Pavlović, T., *Praćenja patogenetskih, morfolometrijskih i funkcionalnih promena nakon ekspozicije elektromagnetnom zračenju*, Izveštaj sa Projekata br. 173. Ministarstvo za nauku, tehnologije i razvoj RS.

- American National Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic fields, 300 kHz to 300 GHz, ANSI C95.1, 1982.
- Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic fields, 3 kHz to 300 GHz, IEEE C95.1-1991, 1992.
- Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Electromagnetic fields, 0 to 3 kHz, IEEE PC95.6-2002.
- International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP) Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic and electromagnetic fields (up to 300 GHz), *Health Phys* 1988;74:pp. 494-522.
- Југословенски стандард са обавезном применом, Радио комуникације. Радио фреквенцијска зрачења. Максимални нивои излагања који се односе на људе. JUS N.No.206 / 1990.
- Laser Institute of America on laser safety,
<http://www.laserinstitute.org/subscriptions>
- American National Standard Institute
<http://www.ansi.org>
- US Department of labor, Occupational Safety & Health Organization,
<http://www.osha.gov>
- Hong Kong Laboratory,
www.hko.gov.hk/cgi-bin
- Orfanidis,S.J, Electromagnetic Waves & Antennas,
www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa

Prilog 1 - Neke osnovne fizičke veličine i jedinice

Naziv	Oznaka	Jedinica
Masa	M	kg - kilogram
Vreme	T	s - sekund
Dužina	L	m - metar
Jačina električne strije	I	A - amper

Prilog 2 - Multipli jedinica

Naziv		Znak	n
jokto	yocto	y	-24
cepto	zepto	z	-21
ato	atto	a	-18
femto	femto	f	-15
piko	pico	p	-12
nano	nano	n	-9
mikro	micro	μ	-6
mili	mili	m	-3
centi	centi	c	-2
deci	deci	d	-1
Osnovana jedinica		Znak	n
		10^n	

Naziv		Znak	n
jota	yotta	Y	+24
ceta	zetta	Z	+21
eksa	exa	E	+18
peta	peta	P	+15
tera	tera	T	+12
giga	giga	G	+9
mega	mega	M	+6
kilo	kilo	k	+3
hekto	hecto	h	+2
deka	deca	da	+1
Osnovana jedinica		Znak	n
		10^n	

Prilog 3 - Neke fizičke konstante

Fizička konstanta	Oznaka	Vrednost i jedinica
Elementarno naelektrisanje	e	$(1.60219 \pm 0.00007)10^{-19} \text{ C}$
Masa elektrona u mirovanju	m_e	$(9.10956 \pm 0.00005)10^{-31} \text{ kg}$
Poluprečnik elektrona	r_e	$2.81793 \pm 0.00001)10^{-15} \text{ m}$
Masa protona u mirovanju	m_p	$(1.67261 \pm 0.00001)10^{-27} \text{ kg}$
Masa neutrona u mirovanju	m_n	$(1.67492 \pm 0.00001)10^{-27} \text{ kg}$
Permitivnost vakuumu	ϵ_0	$(8.85419 \pm 0.00002)10^{-12} \text{ F/m}$
Permeabilnost vakuumu	μ_0	$(1.25663 \pm 0.00002)10^{-6} \text{ H/m}$
Brzina EMT u vakuumu	c	$(2.997925 \pm 0.000003)10^8 \text{ m/s}$

Prilog 4 - Osnovne elektromagnetne veličine i jedinice

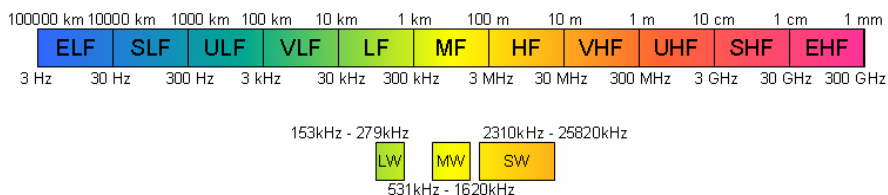
Naziv	Oznaka	j.m.	j.m.	Oznaka	Naziv
Električni skalar potencijal	φ	V	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$	$ \vec{A} $	Jačina magnetnog potencija
Jačina električnog polja	$ \vec{E} $	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	$ \vec{H} $	Jačina magnetnog polja
Jačina električne indukcija	$ \vec{D} $	$\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{T}$	$ \vec{B} $	Jačina magnetne indukcije
Jačina električne polarizacije	$ \vec{P} $	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	$ \vec{M} $	Gustina magnetnog momenta
Gustina naelektrisanja	ρ	$\frac{\text{As}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	$ \vec{J} $	Gustina struje
Dielektrična permeativnost	ϵ	$\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	$\frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	μ	Magnetna permeabilnost
	$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\frac{\text{As}}{\text{m}^3}$	$\frac{\text{Vs}}{\text{m}^3}$	$\text{div } \vec{B} = 0$	

Prilog 5 - Osnovne jednačine makroskopskog EM polja

$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{J}_t d\vec{S}$
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$
$\text{div } \vec{D} = \rho$	$\oint_C \vec{D} d\vec{S} = q$
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\oint_C \vec{B} d\vec{S} = 0$
$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$	$\vec{J} = \sigma \vec{E}$
$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$

Prilog 6 - Podela EM spektra na opsege

Oznaka	Naziv opsega	Opseg
/	Bez naziva i oznake	< 3 Hz
ELF	Extremely Low Frequency ekstremno niske	3 Hz - 30 Hz
SLF	Super Low Frequency super niske	30 Hz - 300 Hz
ULF	Ultra Low Frequency ultra niske	300 Hz - 3 kHz
VLF	Very Low Frequency vrlo niske	3 kHz - 30 kHz
LF	Low Frequency niske	30 kHz - 300 kHz
MF	Medium Frequency srednje	300 kHz - 3000 kHz
HF	High Frequency visoke	3 MHz - 30 MHz
VHF	Very High Frequency vrlo visoke	30 MHz - 300 MHz
UHF	Ultra high frequency ultra visoke	300 MHz - 3000 MHz
SHF	Super High Frequency super visoke	3 GHz - 30 GHz
EHF	Extremely High Frequency ekstra visoke	30 GHz - 300 GHz
/	Bez naziva i oznake	> 300 GHz



Prilog 7 - Lagrangeov metod varijacije konstanti

Neka je data linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = h(x)$$

Ako je poznato rešenje odgovarajuće homogene jednačine,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

opšte rešenja se dobija varijacijom konstanti, $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$.

Ako se, zbog jednostavnosti u pisanju, izostave argumenti prvi izvod je

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'$$

Logično je da prvi izvodi konstanti ne bi trebalo da utiču na prvi izvod funkcije, pa se pretpostavlja da je

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'.$$

Drugi izvod je sada: $y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$.

Kad se rešenje homogene jednačine i ovako određeni prvi i drugi izvod zamene u nehomogenu diferencijalnu jednačinu i kad se grupišu članovi koji predstavljaju rešenje homogene jednačine (njihov zbir je jednak nuli) ostaje

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = h. \quad \text{Determinanta sistema od dve jednačine sa dva}$$

nepoznata prva izvoda konstanti, poznata kao determinanta *Wronskyog*,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ je uvek različita od nule jer su rešenja } y_1 \text{ i } y_2$$

linearno nezavisna. Kad se izračunaju i ostale dve determinate, za konstante se dobija

$$C_1(x) = C_1 - \int_0^x \frac{y_2(s)h(s)}{W(s)} ds, \quad C_2(x) = C_2 + \int_0^x \frac{y_1(s)h(s)}{W(s)} ds,$$

gde su C_1 i C_2 nove konstante integracije. Zamenom u pretpostavljeno rešenje konačno se dobija

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_0^x \frac{K(s,x)}{W(s)} h(s) ds, \text{ gde je}$$

$$K(s,x) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ jezgro integralne jednačine.}$$

Prilikom izvođenja *Hallenove* integralne jednačine za raspodelu struje duž antenskih provodnika polazi se od nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda koja je oblika

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z + k^2 A_z = -j \frac{k}{v} E_z^i.$$

Rešenje odgovarajuće homogene jednačine se dobija ako se to rešenje pretpostavi u obliku $A_z = e^{nz}$ ili, sve jedno, u obliku $A_z = e^{jnz}$. Tako se dobija

$$A_z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

Determinanta *Wronskyog* i jezgro integralne jednačine su

$$W(s) = \begin{vmatrix} \cos ks & \sin ks \\ -k \sin ks & k \cos ks \end{vmatrix} = k \quad K(s, z) = \begin{vmatrix} \cos ks & \sin ks \\ \cos kz & \sin kz \end{vmatrix} = \sin k(z-s),$$

pa je konačno rešenje

$$A_z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz - j \frac{1}{v} \int_0^z E_z^i(s) \sin k(z-s) ds.$$

Kad se incidentno električno polje modeluje pomoću delta generatora

$$E_z^i(z) = U \delta(z)$$

na osnovu definicije Diracove δ funkcije je

$$\int_0^z U \delta(s) \sin k(z-s) ds = U \sin kz$$

pa je konačno rešenje diferencijalne jednačine

$$A_z = C_1 \cos kz + \left(C_2 - j \frac{U}{v} \right) \sin kz$$

iz kog sledi jedan od oblika *Hallenove* integralne jednačine

$$A_z = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz,$$

gde je sa C_2 označena nova konstanta.

Prilog 8 - Sinus i Kosinus integral

Sinus i Kosinus integral nisu tablični integrali niti je njihovo rešenje moguće dobiti u zatvorenom obliku.

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$Ci(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Za male vrednosti argumenta integrali se mogu izračunati tako što se funkcije $\sin t$, odnosno $1 - \cos t$ razviju u red u okolini tačke $t = 0$.

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$1 - \cos t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

Zamenom dobijenih redova u definicione izraze, i zatim integraleći član po član dobijaju se redovi koji veoma brzo konvergiraju

$$Si(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$Ci(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n)!}$$

Za velike vrednosti argumenta koristi se sledeći postupak. Pošto je

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{sledi da je} \quad Si(x) = \frac{\pi}{2} + \int_{\infty}^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Kad se primeni parcijalna integracija ($\alpha = 1/t$, $d\beta = \sin t dt$) sledi

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Posle još jedne parcijalne integracije ($\alpha = 1/t^2$, $d\beta = \cos t dt$) je

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} - 2 \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t^3} dt.$$

Nastavljajući sa parcijalnim integracijama dobija se red čiji članovi veoma brzo teže nuli a preostali integral postaje zanemarljiv.

Na isti način izračunava se vrednost kosinus integrala $Ci(x)$,

$$Ci(x) = \gamma + \ln x - \int_{\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt,$$

gde je γ Eulerova konstanta čija je vrednost $\gamma = 0.577215665$.